

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter <http://www.wurzel.org/werkstatt>.

Aufgabe 6

Bestimme den Parameter a , sodass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 3a-2 \\ 2a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 3a^2+2 \end{pmatrix}$ linear abhängig werden.

1. Lösungsweg

Laut Definition sind die Vektoren linear abhängig, wenn aus

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3a-2 \\ 2a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 3a^2+2 \end{pmatrix} = 0 \text{ nicht folgt, dass } r = s = t = 0. \quad (*)$$

$$r + 3s + t = 0 \quad (I)$$

$$ar + (3a - 2)s - at = 0 \quad (II)$$

$$2r + 2as + (3a^2 + 2)t = 0 \quad (III)$$

Mit $(I)(-a) + (II)$ bzw. $(I)(-2) + (III)$ folgt:

$$-2s - 2at = 0 \quad (IV)$$

$$(2a - 6)s + 3a^2t = 0 \quad (V)$$

Mit $(IV)(3a) + (V)(2)$ bekommen wir

$$(-2a - 12)s = 0. \quad (VI)$$

Wegen $(*)$ gilt $-2a - 12 = 0$ und damit $a = -6$.

Antwort: $a = -6$.

2. Lösungsweg

Die Vektoren sind linear abhängig, wenn ein Vektor als Linearkombination der anderen geschrieben werden kann.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 3a-2 \\ 2a \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 3a^2+2 \end{pmatrix}$$

$$1 = 3t + s \quad (1)$$

$$a = 3at - 2t - sa \quad (2)$$

$$2 = 2at + 3sa^2 + 2s \quad (3)$$

Aus (1) folgt

$$s = 1 - 3t. \quad (4)$$

Mit (4) in (2) erhalten wir:

$$\begin{aligned} a &= 3at - 2t - (1 - 3t)a \\ 6at - 2t &= 2a \rightarrow t = \frac{a}{3a - 1} \end{aligned} \quad (5)$$

Mit (4) in (3) folgt

$$2 = 2at + 3(1 - 3t)a^2 + 2(1 - 3t),$$

oder, nach den üblichen Vereinfachungen,

$$9a^2t - 2at + 6t = 3a^2 \rightarrow t = \frac{3a^2}{9a^2 - 2a + 6}. \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{3a - 1} &= \frac{3a^2}{9a^2 - 2a + 6} \\ 9a^3 - 2a^2 + 6a &= 9a^3 - 3a^2 \\ a^2 + 6a &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

Antwort: $a = 0$ bzw. $a = -6$.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?

Anm.: Mitverfasser dieser Aufgabe ist Matthias Benkeser aus Ottersweier.