Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 8

Löse die Gleichung $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{3x+2}=0$.

Lösung

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{2x+2}=-\sqrt[3]{3x+2} \tag{1}$$

Beide Seiten von (1) werden nun hoch drei genommen:

$$\begin{aligned} x+2+3\sqrt[3]{x+2}^2\sqrt[3]{2x+2}+3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{2x+2}^2+2x+2 &= -3x-2 \\ 3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{2x+2}\left(\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{2x+2}\right) &= -6x-6 \\ 3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{2x+2}\left(-\sqrt[3]{3x+2}\right) &= -6x-6 \\ \sqrt[3]{(x+2)(2x+2)(3x+2)} &= 2(x+1) \end{aligned}$$

Beide Seiten werden hoch drei genommen. Es folgt

$$\begin{aligned}
(x+2)(2x+2)(3x+2) &= 8(x+1)^3\\
(2x^2+6x+4)(3x+2) &= 8(x^3+3x^2+3x+1)\\
6x^3+22x^2+24x+8 &= 8x^3+24x^2+24x+8\\
2x^3+2x^2 &= 0\\
x^2(x+1) &= 0\\
x_1 = 0 \text{ und } x_2 &= -1\,.
\end{aligned}$$

Beide Seiten einer Gleichung mit drei zu potenzieren ist – im Gegensatz zum Quadrieren – eine gleichwertige Umformung. Daraus folgt:
Antwort: $\mathbb{L} = \{-1; 0\}$

Bemerkung

Die Probe in der Ausgangsgleichung ergibt: Für $x = -1$ geht die Gleichung auf $(0 = 0)$, für $x = 0$ aber nicht $(3\sqrt[3]{2} \neq 0)$. Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?