

# Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

## Aufgabe 1

Ein 2 m langes Gummiband ist am linken Ende befestigt. Ein Marienkäfer sitzt am linken Ende des Bandes und bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit von einem Meter pro Minute nach rechts. Nach jeder vollen Minute wird die Länge des Gummibandes durch eine gleichmäßige Dehnung nach rechts verdoppelt.

Ist es möglich, dass der Marienkäfer irgendwann 99 % der jeweiligen Bandlänge hinter sich bringt?

### Anmerkungen

1. Die Größe des Marienkäfers ist zu vernachlässigen.
2. Das Gummiband kann man beliebig dehnen.
3. Die Dauer der Dehnungen ist zu vernachlässigen.

### 1. Lösungsweg

Die Länge des Gummibandes wird im Minutentakt verdoppelt, die Geschwindigkeit des Marienkäfers bleibt hingegen konstant. Deswegen arbeitet die Zeit gegen ihn. Genauer: Mit jeder vergangenen Minute wird der Marienkäfer einen immer kleiner werdenden Anteil des Gummibandes hinter sich bringen. Anstatt sich dem rechten Ende zu nähern bleibt er somit immer weiter zurück. Dies bedeutet:

Antwort: Es ist unmöglich, dass der Marienkäfer 99 % des jeweiligen Bandes zurücklegt.

## 2. Lösungsweg

Der Marienkäfer läuft jede Minute genau 1 Meter. In der ersten Minute legt er  $\frac{1}{2}$  des Bandes zurück. In der zweiten Minute kommt noch  $\frac{1}{4}$  dazu (1 m aus 4 m). In der dritten Minute kommt  $\frac{1}{8}$  dazu (1 m aus 8 m) usw.

$$99\% = \frac{99}{100} = 0,99$$

Die Frage lautet also, ob die Summen  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  usw. irgendwann größer werden als 0,99 oder nicht:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{3}{4} = 0,75 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= \frac{7}{8} \approx 0,88\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &= \frac{15}{16} \approx 0,94 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} &= \frac{31}{32} \approx 0,97 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} &= \frac{63}{64} \approx 0,98 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} &= \frac{127}{128} \approx 0,992.\end{aligned}$$

Die letzte Summe mit sieben Summanden hat 0,99 überschritten. Dies bedeutet:

Antwort: In der siebten Minute wird der Marienkäfer über 99% des entsprechenden Bandes zurückgelegt haben.

## 3. Lösungsweg

In der ersten Minute hat der Marienkäfer 1 m von 2 m geschafft, das entspricht 50%.

In der zweiten Minute ist das Band 4 m lang und der Marienkäfer hat 2 m hinter sich, das entspricht 50 %.  
In der dritten Minute ist das Band 8 m lang und der Marienkäfer hat 3 m hinter sich, das entspricht 37,5 %.  
In der vierten Minute ist das Band 16 m lang und der Marienkäfer hat 4 m hinter sich, das entspricht 25 %.  
Wir merken: Ab der dritten Minute sinkt der prozentuale Anteil des zurückgelegten Weges. Dies bedeutet:  
Antwort: Der Marienkäfer wird nie 99 % des jeweiligen Bandes zurückgelegt haben.

Die Lösungswege haben zu unterschiedlichen Ergebnissen geführt.  
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?