Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 8

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 6x\mathrm{e}^{-x}$ mit $x \geq 0$. Ihr Schaubild sei K. Wir betrachten die Flächen

A_1: die von K, der x-Achse sowie den Geraden $x = 0$ und $x = 2$ eingeschlossen wird.

A_2: jene ins Unendliche reichende Fläche, die von K, der x-Achse und der Geraden $x = 0$ eingeschlossen wird.

Berechne die Flächeninhalte von A_1 und A_2.

1. Lösungsweg

$F(x) = -6x\mathrm{e}^{-x} - 6\mathrm{e}^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f, denn $F'(x) = f(x)$. Es gilt

$$A_1 = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-6x\mathrm{e}^{-x} - 6\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 = 6 - \frac{6}{\mathrm{e}^2} - \frac{12}{\mathrm{e}^2} \approx 3,56\,.$$

Wir ermitteln A_2 in zwei Schritten. Es sei $u > 0$.

$$A_2(u) = \int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-6x\mathrm{e}^{-x} - 6\mathrm{e}^{-x}\right]_0^u = 6 - \frac{6}{\mathrm{e}^u} - \frac{6u}{\mathrm{e}^u}$$

$$\lim_{u\to\infty} A_2(u) = \lim_{u\to\infty}\left[6 - \frac{6}{\mathrm{e}^u} - \frac{6u}{\mathrm{e}^u}\right] = 6 - 0 - 0 = 6$$

Antwort: $A_1 \approx 3,56$ und $A_2 = 6$.

2. Lösungsweg

Wir arbeiten mit der keplerschen Fassregel.

$$A_1 = \frac{2-0}{6} \cdot \left[f(0) + 4 \cdot f\left(\frac{0+2}{2}\right) + f(2) \right] = \frac{1}{3} \cdot [4 \cdot f(1) + f(2)] \approx 3,48$$

Wir ermitteln A_2 in zwei Schritten. Es sei $u > 0$.

$$\begin{aligned} A_2(u) &= \int_0^u f(x)\mathrm{d}x = \frac{u-0}{6} \cdot \left[f(0) + 4 \cdot f\left(\frac{0+u}{2}\right) + f(u) \right] \\ &= \frac{u}{6} \cdot \left[0 + 4 \cdot 6\frac{u}{2}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} + 6u\mathrm{e}^{-u} \right] = 2u^2\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} + u^2\mathrm{e}^{-u} \\ \lim_{u\to\infty} A_2(u) &= \lim_{u\to\infty} \left[2u^2\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} + u^2\mathrm{e}^{-u} \right] = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Anmerkung: Mithilfe des Satzes von l'Hospital folgt z. B.

$$\lim_{u\to\infty} u^2\mathrm{e}^{-u} = \lim_{u\to\infty} \frac{u^2}{\mathrm{e}^u} = \lim_{u\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^u} = 0\,.$$

Antwort: $A_1 \approx 3,48$ und $A_2 \approx 0$.

Die zwei Lösungswege haben im Falle von A_2 zu zwei sehr unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?