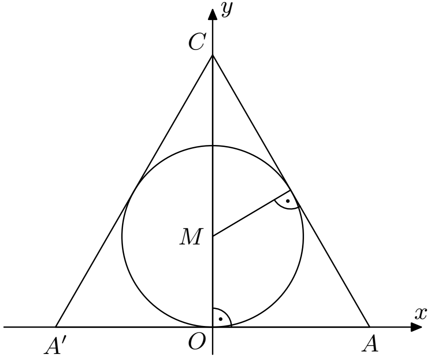
Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 2

Einer Kugel mit dem Radius $r = 1\,\mathrm{m}$ soll ein gerader Kreiskegel mit möglichst kleinem Volumen umschrieben werden. Ermittle die Höhe des Kegels!

1. Lösungsweg

Es handelt sich um einen Rotationskörper. In der nebenstehenden Skizze stellen $\overline{OC}$ die Höhe, $\overline{OA} = \overline{OA'}$ den Radius des Kegels dar. $\overline{OC}$ ist aber gleichzeitig die Höhe des Dreiecks $\triangle A'AC$. Wird dies um $\overline{OC}$ gedreht, entsteht der Kegel. Wir ermitteln nun jenes kleinstmögliche gleichschenklige Dreieck, das dem Kreis mit dem Radius 1 umbeschrieben werden kann. Es sei $|\overline{OA}| = a$ und $|\overline{OC}| = c$. Im eingeführtem Koordinatensystem ist somit $A(a|0)$, $C(0|c)$ und $M(0|1)$. Es gilt somit für die Strecke $\overline{AC}$



$$y = -\frac{c}{a}x + c \quad \Leftrightarrow \quad cx + ay = ac\,.$$

Die Bedingung dafür, dass $\overline{AC}$ den Kreis berührt, ist $d(M, \overline{AC}) = 1$. Mit der aus dem Dreidimensionalen bekannten Formel für den Abstand von Ebene und Punkt folgt

$$\begin{aligned} \frac{|c \cdot 0 + a \cdot 1 - ac|}{\sqrt{c^2 + a^2}} &= 1 \qquad \big|()^2 \\ \frac{(a - ac)^2}{c^2 + a^2} &= 1\,. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite gilt dann

$$a^2 - 2a^2c + a^2c^2 = c^2 + a^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (c^2 - 2c)a^2 = c^2\,.$$

Somit kann a berechnet werden, wobei nur die positive Lösung sinnvoll ist:

$$a^2 = \frac{c^2}{c^2 - 2c}\,, \qquad a = \sqrt{\frac{c}{c-2}}\,.$$

Damit kann der Flächeninhalt des Dreiecks $A'AC$ berechnet werden:

$$A = \frac{\overline{A'A} \cdot \overline{OC}}{2} = \frac{2ac}{2} = ac = \sqrt{\frac{c}{c-2}} \cdot c = \sqrt{\frac{c^3}{c-2}}\,.$$

Die Funktion $f(c) = \sqrt{\frac{c^3}{c-2}}$ soll nun minimal werden:

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{c^3}{c-2}}} \cdot \frac{3c^2(c-2) - c^3 \cdot 1}{(c-2)^2} = \frac{2c^2(c-3)}{2\sqrt{\frac{c}{c-2}} \cdot (c-2)^2}\,.$$

Aus $f'(c) = 0$ folgt $c = 3$. Außerdem hat f' an der Stelle 3 einen Vorzeichenwechsel von Minus zu Plus, weshalb $f_{\min} = f(3)$ gilt.

Antwort: Die Höhe des Kegels beträgt 3 m.

2. Lösungsweg

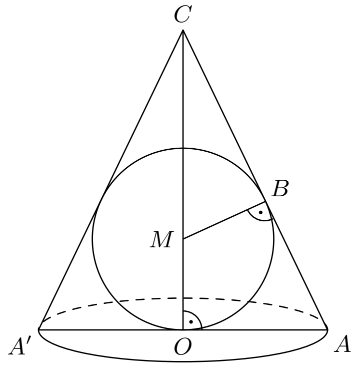
Es sei auch hier $\overline{OC} = c$ und $\overline{OA} = a$ (siehe Bild). Die Dreiecke $\triangle CBM$ und $\triangle AOC$ sind ähnlich, denn der Winkel bei C ist gemeinsam und beide Dreiecke sind rechtwinklig. Aus der Ähnlichkeit folgt

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} = \frac{\overline{BC}}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{BC} = \frac{c}{a}\,,$$

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c-1}{\overline{AC}} = \frac{c/a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AC} = ac - a\,.$$

Wir wenden nun den Satz des Pythagoras an:

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2\\ (ac-a)^2 &= a^2 + c^2\\ a^2 - 2a^2c + a^2c^2 &= a^2 + c^2\\ (c^2-2c)a^2 &= c^2\\ a^2 &= \frac{c^2}{c^2-2c}\,.\end{aligned}$$



Damit lässt sich das Volumen des Kreiskegels berechnen:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot a^2\cdot c = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{c^2}{c^2-2c}\cdot c\,.$$

Nun soll die Funktion $g(c) = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{c^2}{c-2}$ minimal werden:

$$g'(c) = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{2c\cdot(c-2)-c^2\cdot 1}{(c-2)^2} = \frac{\pi c(c-4)}{3(c-2)^2}\,.$$

Aus $g'(c)=0$ folgt $c=4$ und wegen des Vorzeichenwechsels von g an dieser Stelle gilt damit $g_{\min} = g(4)$.
Antwort: Die Höhe des Kegels beträgt 4 m.
Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?