$^{\text{Die}}\sqrt{\text{WURZEL}}$ – Werkstatt Mathematik

Lösungen der Aufgaben 1 – 5

Aufgabe 1: Auf einem Konto liegen 500 Mark. Nur zwei Arten von Kontobewegungen sind erlaubt:

Auszahlung von 300 Mark

Einzahlung von 198 Mark .

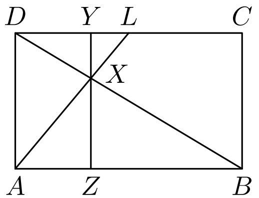
Aus- bzw. Einzahlungen der beschriebenen Art können beliebig oft erfolgen. Der Kontostand darf 500 Mark nicht überschreiten, ein Überziehen des Kontos ist ebenfalls nicht möglich. Welcher Betrag kann maximal vom Konto abgehoben werden? Welche Kontobewegungen sind hierzu notwendig?

Lösung (Martin Schmidt, Erfurt):

Aufgrund der besonderen Kontomodalitäten sind zu Beginn nur folgende Geldbewegungen möglich: 1. Abheben von 300 DM, 2. Einzahlen von 198 DM und 3. Abheben von 300 DM. Da 300 und 198 den Teiler 3 haben, gibt es keine Auszahlung von 500 DM von der Bank. Es bleiben noch 98 DM auf dem Konto. Im folgenden ist stets nur der Zyklus +198, +198, -300, +198, -300 (in dieser Reihenfolge) bei den Kontobewegungen möglich. Insgesamt werden pro Zyklus 6 DM abgebucht. Nach dem ersten Fünferzyklus sind noch 92 DM Guthaben vorhanden. Dieser Fünferblock läßt sich insgesamt 16 Mal wiederholen, bis am Ende nur noch 98 DM - $16 \cdot 6$ DM = 2 DM auf dem Konto sind. Es können demnach maximal 498 DM von dieser Bank abgehoben werden.

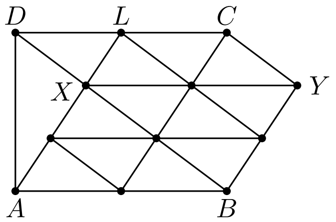
Aufgabe 2: Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$. K, L sind die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. CD. Die Diagonale BD und die Strecke LA schneiden sich in X. Welchen Bruchteil der Rechtecksfläche nimmt der Flächeninhalt des Dreiecks LXD ein?

Lösung (Giulio Schober, Leipzig):



Die Dreiecke ABX und LDX sind ähnlich, da $\sphericalangle BXA \cong \sphericalangle DXL$, $\sphericalangle XLD \cong \sphericalangle BAX$ und $\sphericalangle LDX \cong \sphericalangle ABX$. Wegen $AB = 2 \cdot DL$ gilt auch $ZX = 2 \cdot XY$, da sich die Höhen zweier ähnlicher Dreiecke wie die entsprechenden Grundseiten verhalten. Dies liefert $XY = \frac{1}{3}AD$.
Damit gilt:

$$A_{LDX} = \frac{1}{2} \cdot XY \cdot DL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot AD \cdot \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{12} \cdot AD \cdot AB = \frac{1}{12} \cdot A_{ABCD}.$$



Einen netten Zerlegungsbeweis hat Hans Engelhaupt, Gundelsheim, geschickt:
Da eine zentrische Streckung mit dem Zentrum X und dem Streckungsfaktor 2 das Dreieck LDX auf das Dreieck ABX abbildet, teilt X die Strecken DB und LA im Verhältnis 1:2. Verschiebt man nun das Dreieck DAX um die Strecke AB nach rechts, so entsteht ein zum Rechteck $ABCD$ flächengleiches Sechseck $ABYCDX$. Dieses kann man mit 12 zum Dreieck LDX kongruenten Dreiecken vollständig belegen.

Aufgabe 3: Bei einem Motorrad-Sandbahnrennen beträgt die Rundenlänge 1,0 km. Zwei Motorradfahrer stehen zu Beginn am Start A und fahren in entgegengesetzten Richtungen los. Fahrer 1 fährt mit konstanter Geschwindigkeit, Fahrer 2 beschleunigt konstant. Sie begegnen sich das erste Mal in einem Punkt B ($\neq$ A), und das nächste Mal in A. Welche Strecke hat Fahrer 1 vom Start bis zum Treffpunkt B zurückgelegt?

Lösung (Rainer Sattler, Ilmenau):

Es sei $t_0 = 0$ und $v_1 = const$ (Fahrer 1) sowie $a_2 = const$ (Fahrer 2). Da sich beide Fahrer zum zweiten Mal in A treffen, folgt mit $t(A) = T$:

$v_1 = \frac{1\,\mathrm{km}}{T}$ und $a_2 = \frac{2v_1}{T} = \frac{2\,\mathrm{km}}{T^2}$, denn $v_2(T) = a_2 \cdot T = 2 \cdot \overline{v_2} = 2 \cdot v_1$.

Aus der Addition der Weg-Zeit-Gesetze ergibt sich nun

$s_1(t_B) + s_2(t_B) = 1\,\mathrm{km}$ bzw. $v_1 t_B + \frac{a_2}{2} t_B^2 - 1\,\mathrm{km} = 0$

$\Rightarrow \frac{1\,\mathrm{km}\cdot t_B^2}{T^2} + \frac{1\,\mathrm{km}\cdot t_B}{T} - 1\,\mathrm{km} = 0 \Rightarrow \left(\frac{t_B}{T}\right) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sowie

$s_1(t_B) = v_1 t_B = \frac{1\,\mathrm{km}}{T} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot T = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(Dies ist ein überraschendes Ergebnis, zeigt es doch, daß der Punkt B die Bahn im Goldenen Schnitt teilt !)

Aufgabe 4: Welches Lösungspaar (x, y), x, y reell, erfüllt die Gleichung

$$(4x^2 + 6x + 4) \cdot (4y^2 - 12y + 25) = 28\,?$$

Lösung (Martin Schmidt):

Durch quadratische Ergänzung lassen sich beide Klammern wie folgt schreiben:

$$[(2x + 1.5)^2 + 1.75] \cdot [(2y - 3)^2 + 16] = 28.$$

Der erste Faktor ist somit stets größer oder gleich 1.75, der zweite mindestens 16. Das kleinstmögliche Produkt errechnet sich daher zu $1.75 \cdot 16 = 28$. Dies ist für das Lösungspaar (-0.75;1.5) der Fall. Für alle anderen Paare reeller Zahlen $(x; y)$ ist das Produkt größer als 28. Damit ist (-0.75;1.5) die einzige reelle Lösung der Gleichung.

Aufgabe 5: Finde alle sechsstelligen natürlichen Zahlen $abcdef$ $(a,\ d \neq 0)$, die im Stellenwertsystem folgender Bedingung genügen:

$$abcdef = (def)^2.$$

Lösung (leicht modifiziert, Rainer Sattler)

Wir setzen $y = abc$ und $x = def$, wobei $316 < x < 1000$ und $y < 1000$. Damit erhalten wir
$1000y + x = x^2 \Rightarrow x(x-1) = 1000y \Rightarrow x(x-1) = 2^3 \cdot 5^3 \cdot y$.
Dies bedeutet: Genau eine der Zahlen x bzw. $x-1$ muß durch 8, die andere durch 125 teilbar sein. Es kommen daher nur die Zahlen 375, 625 und 875 in Frage. Wir untersuchen diese Möglichkeiten der Reihe nach:

$$\begin{array}{ll} x = 375 \ \Rightarrow\ x-1 = 374 = 2 \cdot 187 & x-1 = 375 \ \Rightarrow\ x = 376 = 2^3 \cdot 47 \\ x = 625 \ \Rightarrow\ x-1 = 624 = 2^4 \cdot 39 & x-1 = 625 \ \Rightarrow\ x = 626 = 2 \cdot 313 \\ x = 875 \ \Rightarrow\ x-1 = 876 = 2 \cdot 437 & x-1 = 875 \ \Rightarrow\ x = 876 = 2^2 \cdot 219 \end{array}$$

Es ist ersichtlich, daß die Bedingungen nur für $x = 625$ und $x = 376$ erfüllt sind:

$$390625 = 625^2 \qquad 141376 = 376^2.$$

Weitere Lösungen zu den Aufgaben dieser Serie gingen von Michael Möbius (Sulzbach), Ralf Kleinschmidt (Frankfurt/Main), Peter Zimmermann und Schülern (Kantonsschule Glarus, Schweiz) sowie Peter Andree (Konstanz) ein.

Paul Jainta, Schwabach
(erschienen in $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 2/2000)