# $^{\text{Die}}\sqrt{\text{WURZEL}}$ – Werkstatt Mathematik
## Lösungen der Aufgaben 6 – 10

Es folgen die Lösungen zu den Problemen aus der zweiten ‚Werkstatt'.

**Aufgabe 6** Man ermittle alle Paare $(a, b)$ reeller Zahlen, für welche das Polynom $x^4 + ax^2 + b$ durch das Polynom $x^2 + ax + b$ teilbar ist.

**Lösung** (Peter Zimmermann, Kantonsschule Glarus, Schweiz; Teillösung von Dr. C. Müller, Jena):

Polynomdivision führt auf den Zählerterm des Restpolynoms: $(ab - a^3 - a^2 + ab) \cdot x + (b - a^2 b - ab + b^2)$. Man führe die Berechnung selbst durch! Damit die Division „aufgeht", muss dieser Term identisch verschwinden d. h. die Koeffizienten müssen Null ergeben. Dies liefert die beiden Gleichungen (1) und (2), die gleichzeitig erfüllt sein müssen:

$(1)\ \ a(a^2 + a - 2b) = 0$ und $(2)\ \ b(a^2 + a - b - 1) = 0.$

Durchspielen mehrerer Fälle führt auf die Lösungen:

1. $a = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$ oder $b = -1$
2. $b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$
3. $a^2 + a - 2b = 0$, $a^2 + a - b - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 1,\ a = 1$ oder $a = -2$.

Also ist für $(a, b) \in \{(0, 0), (0, -1), (-1, 0), (1, 1), (-2, 1)\}$ das Polynom $x^4 + ax^2 + b$ durch das Polynom $x^2 + ax + b$ teilbar.

**Aufgabe 7** Es sei $S$ eine Teilmenge der Menge $M = 1, 2, 3, \ldots, 1000$ mit folgender Eigenschaft: Sind $a$ und $b$ zwei (nicht notwendig verschiedene) Elemente aus $S$, dann liegt ihr Produkt $a \cdot b$ nicht in $S$. Wie viele Elemente kann $S$ höchstens haben?

**Lösung** (Dr. C. Müller; ebenfalls gelöst von Peter Zimmermann):

Es bezeichne $|x|$ die größte ganze Zahl kleiner gleich $x$. Dann gilt sicher, dass die gesuchte Teilmenge $S$ mindestens $969 = 1000 - |\sqrt{1000}|$ Elemente haben muss, denn das Produkt je zweier Zahlen aus $S = 32, 33, 34, \ldots, 999, 1000$ ist stets größer als 1000 und liegt somit nicht in $M$ (Beachte: $32^2 > 1000$).

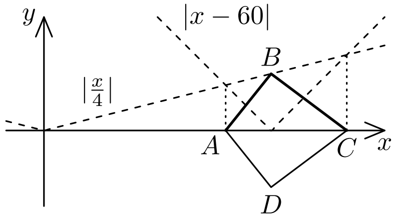
(Anmerkung: Um nachzuweisen, dass 969 tatsächlich nicht verkleinert werden kann, setzen wir $a_i = 31 - i$, $b_i = 32 + i$ und $c_i = a_i \cdot b_i = 992 - i - i^2$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, 29$. Dann ist $2 = a_{29} < a_{28} < \cdots < a_0 < b_0 < b_1 < \cdots < b_{29} < c_{29} < \cdots < c_0 = 992$. Aus diesen $3 \cdot 30 = 90$ Zahlen kann man höchstens $2 \cdot 30 = 60$ auswählen, da von den Zahlen $a_i$, $b_i$, $c_i$ maximal nur zwei aus $M$ sein können. Von den restlichen $1000 - 90 = 910$ Zahlen können wiederum nur 909 genommen werden, da die Zahl 1 bereits darunter ist und alle anderen ausschließen würde. Also enthält die Menge $S$ höchstens 60+909=969 Elemente.)

**Aufgabe 8** Welchen Inhalt hat die Fläche, die vom Graph der Relation $|x - 60| + |y| = \left|\frac{x}{4}\right|$ begrenzt wird?

**Lösung** (Peter Zimmermann und Schüler):

Herr Zimmermann schreibt: „Unsere Schüler schätzen Betragsaufgaben nicht … “. Mithilfe der Rechner TI-82 bzw. TI-92 und $|y| = \left|\frac{x}{4}\right| - |x - 60|$ bzw. $y = \left|\frac{x}{4}\right| - |x - 60|$ und $y = -\left(\left|\frac{x}{4}\right| - |x - 60|\right)$ konnte der Graph gezeichnet werden. Als Flächeninhalt ergab sich $A = 480$.

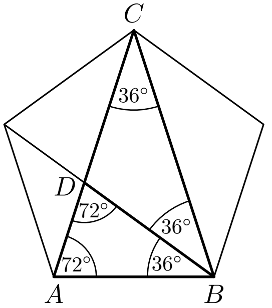
(Anmerkung: Dieser Lösungsversuch befriedigt Puristen natürlich nicht. Wegen des Terms $|y|$ ist der implizite Graph $|x - 60| + |y| - \left|\frac{x}{4}\right| = 0$ symmetrisch zur $x$-Achse. Es genügt daher den Fall $y \geq 0$ zu betrachten. Der doppelte Flächeninhalt dieses Graphen ergibt den gesuchten Wert. Nun gilt $y = \left|\frac{x}{4}\right| - |x - 60| \geq 0$ nur für $48 \leq x \leq 80$, diese Grenzen erhält man aus den Gleichungen $\frac{x}{4} = 60 - x$ bzw. $\frac{x}{4} = x - 60$. In diesem Intervall bildet der Gesamtgraph für $y \geq 0$ das Dreieck $ABC$. Die Grundseite des Dreiecks hat die Länge $80 - 48 = 32$, seine Höhe ergibt sich für $x = 60$ zu 15. Damit hat das Dreieck $ABC$ die Fläche $\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 15 = 240$. Der Drachen $ABCD$ besitzt daher den Inhalt 480.)



**Aufgabe 9** Gegeben ist ein reguläres Fünfeck $PQRST$ mit Seitenlänge $a$. Die Diagonale $[PS]$ hat die Länge $b$. Zeige: $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} = 1$.

**Lösung** (Peter Zimmermann und Schüler):

Im regulären Fünfeck stehen Seiten und Diagonalen im Verhältnis des Goldenen Schnitts, also gilt die Verhältnisgleichheit $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$, also $b^2 - ab = a^2$ und nach Division durch $ab$ erhalten wir das Ergebnis $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} = 1$.




(Anmerkung: Im regelmäßigen Fünfeck ist das gleichschenklige Dreieck mit dem Winkel an $36°$ an der Spitze die „Schlüsselfigur“. Es hat die Basiswinkel $72°$, die Winkelhalbierende eines Basiswinkels trennt daher vom Gesamtdreieck ein dazu ähnliches Dreieck $DAB$ ab. Das Restdreieck $BCD$, das so genannte „stumpfe Goldene Dreieck“ ist ebenfalls gleichschenklig. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $ABC$ (Basis $AB$) und $DAB$ ergibt sich die Bedingung $\frac{c}{a} = \frac{a-c}{c}$. Somit sind im regulären Fünfeck Seiten und Diagonalen im Verhältnis des Goldenen Schnitts $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .)

**Aufgabe 10** Das nebenstehende Diagramm ist so mit natürlichen Zahlen auszufüllen, dass in jeder Zeile und jeder Spalte eine fünfgliedrige arithmetische Folge entsteht.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | 74 | | | |
| | | | | 186 |
| | | 103 | | |
| 0 | | | | |

**Lösung** (Peter Zimmermann und Schüler):

Diese Aufgabe interessierte die Schüler besonders. Sie begannen richtig unten links, hatten aber Mühe mit der Anzahl der Variablen. Dass das Problem die Lösung eines Gleichungssystems mit drei Unbekannten beinhaltet, war nicht allen klar. Wir belegen also die drei Nachbarfelder der Null wie im Diagramm.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | 74 | | | |
| | | | | 186 |
| $a$ | $b+c$ | 103 | | |
| 0 | $b$ | | | |

Wir benutzen dabei, dass sich je zwei Glieder einer arithmetischen Folge stets um eine konstante Differenz unterscheiden. Damit ergibt sich folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&b + 3c = 74 && \text{(2. Spalte mit Differenz } c\text{)}\\
&2b + 2c - a = 103 && \text{(2. Reihe von unten mit Differenz } b + c - a\text{)}\\
&2a + 4(b + 2c - 2a) = 186 && \text{(3. Reihe von unten mit Differenz } b + 2c - 2a\text{)}
\end{aligned}$$

Die Lösungen des Gleichungssystems sind $a = 13$, $b = 50$ und $c = 8$. Damit erhalten wir das nebenstehende, vollständig ausgefüllte Diagramm.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 52 | 82 | 112 | 142 | 172 |
| 39 | 74 | 109 | 144 | 179 |
| 26 | 66 | 106 | 146 | 186 |
| 13 | 58 | 103 | 148 | 193 |
| 0 | 50 | 100 | 150 | 200 |

Die Lösungen zu den Problemen 11 bis 15 werden in einer der nächsten Ausgaben der ‚Werkstatt' erscheinen. Ich darf die Leser ermuntern, weitere kreative Resultate zu produzieren.

*Paul Jainta, Schwabach*
*Paul.Jainta@aol.com*
(erschienen in $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 12/2000, 34. Jg, S. 271)

| | |
|---|---|
| $\sqrt{\text{WURZEL}}$ im Internet | www.wurzel.org |
| Werkstatt Mathematik | www.wurzel.org/werkstatt |
| Redaktion | *redaktion@wurzel.org* |