$^{\text{Die}}\sqrt{\text{WURZEL}}$ – Werkstatt Mathematik
Lösungen der Probleme aus der dritten bis fünften Werkstatt

Es ist eine Binsenweisheit: „Man kann nicht allein durch Zuschauen Mathematik erlernen“. Nur im Umgang mit komplexen oder tief gehenden Fragestellungen bringt man sich (mathematisches) Denken bei. Hier sind einige Produkte aus eigener Herstellung von Lesern. Viel Spaß bei der Würdigung der Werk*stücke*. Prima wäre es, wenn das Bearbeitungsspektrum sich noch ausweiten könnte. Ein gut gefüllter Ideenkasten reizt vielleicht die Eine oder den Anderen zur Anfertigung weiterer Musterproben.

Aufgabe 11 Man zeige: Ein Polynom $f(x)$ über der Menge $\mathbb{Z}$ hat keine ganzzahlige Nullstelle, wenn $f(0)$ und $f(1)$ beide ungerade sind.

Lösung 1 (Dietmar Berthold, Chemnitz)
Mit n werde der Grad des Polynoms f bezeichnet. Im Falle $n = 0$ ist f identisch mit der ungeraden Zahl $f(0)$ und besitzt daher keine ganzzahlige Nullstelle. Sei nun $n \geq 1$. Wir schreiben

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_k, $k = 0, \ldots, n$ und nehmen an, es existiert ein $x_0 \in \mathbb{Z}$ mit $f(x_0) = 0$. Im Folgenden wird die Annahme zum Widerspruch geführt.

Fall $\boldsymbol{x_0}$ *gerade*: Wir setzen $x_0 = 2z_0$. Nach Voraussetzung ist $a_0 = f(0)$ ungerade. Damit ist auch $f(2z_0) = 2^n a_n z_0^n + 2^{n-1}a_{n-1}z_0^{n-1} + \ldots + 2a_1 z_0 + a_0$ eine ungerade ganze Zahl. Damit kann x_0 keine Nullstelle sein.

Fall $\boldsymbol{x_0}$ *ungerade*: Wir setzen $x_0 = 2z_0 + 1$. Dann kann man schreiben:

$$f(2z_0+1) = a_n(2z_0+1)^n + a_{n-1}(2z_0+1)^{n-1} + \ldots + a_1(2z_0+1) + a_0\,.$$

Jede Potenz $(2z_0+1)^k$, $k=1,\dots,n$ ist nach Anwendung des Binomischen Satzes darstellbar als $2q_k+1$ mit ganzen Zahlen q_k, $k=1,\dots,n$.[1] Daher gilt

$$\begin{aligned} f(2z_0+1) &= a_n(2q_n+1)+a_{n-1}(2q_{n-1}+1)+\ldots+a_1(2q_1+1)+a_0 \\ &= (2a_nq_n+2a_{n-1}q_{n-1}+\ldots+2a_1q_1) \\ &\qquad + (a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)\,. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist die Koeffizientensumme $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0=f(1)$ ungerade. Somit ist auch der Wert $f(2z_0+1)$ ungerade und x_0 also ebenfalls nicht Nullstelle.

Lösung 2 (Tobias Reuber, Gymnasium Wilnsdorf)
Angenommen, die ganze Zahl a ist Nullstelle von f. Aus dem Faktorsatz folgt: $f(x)=(x-a)q(x)$. Einsetzen von 0 und 1 liefern

$$(1)\quad f(0)=-a\cdot q(0) \qquad \text{und} \qquad (2)\quad f(1)=(1-a)\cdot q(1)\,.$$

Nach Voraussetzung ist $q(0)$ ganzzahlig. Aus (1) folgt, dass a und $q(0)$ ungerade sein müssen. Damit ist $1-a$ gerade und nach (2) ist dann $f(1)$ ebenfalls gerade, ein Widerspruch zu $f(1)$ ungerade.

Aufgabe 12 Wie viele arithmetische Folgen mit positiven ganzzahligen Gliedern und folgender Eigenschaft sind möglich: Die Summe der ersten 37 Folgenglieder ist 1998?

Lösung (Dietmar Berthold, Chemnitz)
Fall unendliche Folge. Sei (a_k), $a_k\in\mathbb{Z}$, $k=0,1,\dots$ eine arithmetische Folge der gesuchten Art. Diese ist monoton steigend, da anderenfalls nicht alle Folgenglieder positiv sein können. Es gibt daher ein $d\in\mathbb{Z}$, $d\geq 0$ mit $a_k=a_0+k\cdot d$,

[1] Anm. d. Red.: Dabei handelt es sich einfach um die Tatsache, dass die Potenzen ungerader Zahlen wieder ungerade sind.

$k = 0, 1, \dots$ Aus

$$1998 = \sum_{k=0}^{36} a_k = \sum_{k=0}^{36} (a_0 + kd) = 37a_0 + d \cdot \sum_{k=0}^{36} k = 37a_0 + 666d$$

und $a_0 > 0$ ergibt sich die Forderung $a_0 = 54 - 18d > 0$. Daher kommen für d nur die Werte 0, 1, 2 in Frage, woraus sich für die Anfangsglieder a_0 die Zahlen 54, 36, 18 ergeben. Es erfüllen also genau die drei Folgen mit den allgemeinen Gliedern $a_k = 54$ (konstante Folge), $a_k = 36 + k$ und $a_k = 18 + 2k$ die Bedingungen der Aufgabe.

Tobias Kegel, Burbach, hat für den **Fall endlicher Folgen** zwei weitere arithmetische Folgen gefunden. Für $d < 0$ und $a_0 = 54 - 18d$ ergeben sich für $d = -1$ bzw. $d = -2$ und $k = 0, 1, \dots$ die Bildungsgesetze $a_k = 72 - k$ bzw. $a_k = 90 - 2k$. Dabei besitzt die erste Folge 72 Glieder, die zweite dagegen nur 45.

Ebenfalls gelöst von Tobias Reuber, Gymnasium Wilnsdorf.

Aufgabe 14 Kann es eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den beiden Eigenschaften

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & f(1 + f(x)) = 1 - x & \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \\ \text{(ii)} & f(f(x)) = x & \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \end{array}$$

geben?

Lösung (Dietmar Berthold, Chemnitz)
Angenommen, es gibt eine solche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ergibt sich z. B. für $x = \frac{1}{2}$ wegen (i): $f(1 + f(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$. Wendet man auf beide Seiten dieser Gleichung nochmals die Funktion f an, erhält man $f(f(1 + f(\frac{1}{2}))) = f(\frac{1}{2})$. Wegen (ii) lässt sich die linke Seite dieser Gleichung schreiben als $1 + f(\frac{1}{2})$. Damit vereinfacht sich die letzte Gleichung zu $1 + f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$ und führt auf den Widerspruch $1 = 0$. Es kann also eine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften nicht geben.

Aufgabe 16 Gesucht sind alle reellen Lösungen der Wurzelgleichung

$$\sqrt{3x^2-18x+52}+\sqrt{2x^2-12x+162}=\sqrt{-x^2+6x+280}\,.$$

Lösung (Dietmar Berthold, Chemnitz)
Wenn x eine Lösung der gegebenen Wurzelgleichung ist, dann gilt:

$$\sqrt{2x^2-12x+162}=\sqrt{-x^2+6x+280}-\sqrt{3x^2-18x+52}\,.$$

Nach Quadrieren der Gleichung erhält man

$$\begin{aligned}&2x^2-12x+162\\&\quad=2x^2-12x+332-2\cdot\sqrt{-x^2+6x+280}\cdot\sqrt{3x^2-18x+52}\,.\end{aligned}$$

Nach weiteren Umformungen und Quadrieren beider Seiten ergibt sich daraus die Beziehung $(-x^2+6x+280)(3x^2-18x+52)=7225$. Quadratische Ergänzung in beiden Klammern liefert

$$[-(x-3)^2+289]\cdot[3(x-3)^2+25]=7225\,.$$

Mit der Substitution $z=x-3$ vereinfacht sich die letzte Gleichung zu $3z^4-842z^2=0$, deren Lösungen $z_1=0$ und $z_{2,3}=\pm\frac{1}{3}\sqrt{2526}$ lauten. Falls die gegebene Gleichung Lösungen x besitzt, können es nur die Werte $x_1=3$ und $x_{2,3}=3\pm\frac{1}{3}\sqrt{2526}$ sein. Nachrechnen bestätigt, dass tatsächlich nur $x_1=3$ eine Lösung der Wurzelgleichung ist.

Aufgabe 17 Für welche natürlichen Zahlen n gilt: $2^n > 10n^2 - 60n + 80$?

Lösung (Tobias Kegel, Burbach)
Eine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, wächst bekanntlich für hinreichend große x schneller als jede Funktion, deren Term ein Polynom ist. Für alle $n > n_0$, mit geeignetem $n_0 \in \mathbb{N}$, gilt also die gegebene Ungleichung, da für hinreichend große n stets 2^n größer als das vorgegebene Polynom ist. Um herauszufinden, ab welchem n_0 dies der Fall ist, berechne ich für die ersten n die Werte von 2^n bzw. $10n^2 - 60n + 80$ und vergleiche diese. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$10n^2 - 60n + 80$	80	30	0	-10	0	30	80	150	240	350	480
$2^n > 10n^2 - 60n + 80$	nein	nein	ja	ja	ja	ja	nein	nein	ja	ja	ja

Man sieht an den berechneten Werten, dass die Folgenglieder $a_n = 2^n$ für $n = 2, 3, 4, 5$ jeweils größer als die entsprechenden Glieder der Folge $b_n = 10n^2 - 60n + 80$ sind und ab $n = 8$ schneller als die entsprechenden Werte der Folgenglieder b_n wachsen (Siehe die eingangs getroffene Bemerkung). [2] *Ebenfalls gelöst von Dietmar Berthold, Chemnitz.*

[2] Anm. d. Red.: Dies hätte üblicherweise noch durch Induktion gezeigt werden müssen. Der Induktionsschritt sieht dann z. B. so aus:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n &> 2 \cdot (10n^2 - 60n + 80) \\ &= 10(n+1)^2 - 60(n+1) + 80 + 10(n-4)^2 - 30 \\ &> 10(n+1)^2 - 60(n+1) + 80\,, \end{aligned}$$

da $10(n-4)^2 - 30 > 0$ für $n \geq 6$.

Aufgabe 18 Zu jeder reellen Zahl a bestimme man alle reellen x, die der Gleichung $(2x+1)^4+ax(x+1)-\frac{a}{2}=0$ genügen.

Lösung (Dietmar Berthold, Chemnitz)

Sei x eine gesuchte reelle Lösung der angegebenen Gleichung. Mit der Substitution $b=\frac{a}{8}$ ist diese äquivalent zu $0=(2x+1)^4+2b(2x+1)^2-6b$ bzw. zu $[(2x+1)^2+b]^2=b^2+6b$. Eine Bedingung an die Lösbarkeit ist somit $b^2+6b\geq 0$ und damit $b\notin(-6,0)$. In diesem Fall kann man weiter umformen zu $|(2x+1)^2+b|=\sqrt{b^2+6b}$, so dass $(2x+1)^2$ nur die Werte $\pm\sqrt{b^2+6b}-b$ annehmen kann.

Fall $b=0$ ($a=0$): Hier erhält man wegen $(2x+1)^4=0$ die Vierfachlösung $x_1=-\frac{1}{2}$.

Fall $b>0$ ($a>0$): Wie man leicht sieht, ist $+\sqrt{b^2+6b}-b>0$, während stets $-\sqrt{b^2+6b}-b<0$ ist, so dass nur der erste Wert zu reellen Lösungen x führt. Diese sind $x_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{\sqrt{b^2+6b}-b})$.

Fall $b=-6$ ($a=-48$): In diesem Fall ist $(2x+1)^2=6$, so dass die Lösungen lauten: $x_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{6})$.

Fall $b<-6$ ($a<-48$): Hier ist offensichtlich $\sqrt{b^2+6b}-b>0$. Wegen $0\leq b^2+6b\leq b^2$ und somit $\sqrt{b^2+6b}\leq|b|=-b$ ist $-\sqrt{b^2+6b}-b\geq 0$. Damit sind die reellen Lösungen in diesem Fall

$$x_{1,2,3,4}=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\pm\sqrt{b^2+6b}-b}\right).$$

Man überzeugt sich, dass die gefundenen Werte tatsächlich Lösungen der gegebenen Gleichung sind.

Aufgabe 21 Gegeben ist ein kubisches Polynom $p(x)$ mit den Nullstellen x_1, x_2, x_3, das folgender Bedingung genügt: $p(\frac{1}{2}) + p(-\frac{1}{2}) = 1000 \cdot p(0)$. Welchen Wert nimmt dann der Term

$$\frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{1}{x_1 \cdot x_3}$$

an? (Australian Mathematical Olympiad 1996)

Lösung (Tobias Kegel, Burbach)
Wir schreiben $p(x)$ in der Form $p(x) = d \cdot (x^3 + ax^2 + bx + c)$, a, b, c, d reell, $d \neq 0$. Nach Voraussetzung ist $p(\frac{1}{2}) + p(-\frac{1}{2}) = 1000 \cdot p(0)$. Daraus folgt $d \cdot (\frac{1}{8} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c) + d \cdot (-\frac{1}{8} + \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c) = 1000 \cdot dc$ bzw. $2 \cdot \frac{a}{4} + 2 \cdot c = 1000c$. Dies liefert $a = 1996c$. Sind x_1, x_2, x_3 die Nullstellen von $p(x)$, dann lässt sich p schreiben als $p(x) = d(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ und nach dem Satz von Vieta folgt: $ad = -(x_1 + x_2 + x_3)$ und $cd = -x_1x_2x_3$. Durch Einsetzen von $a = 1996c$ ergibt sich die Gleichung $-(x_1 + x_2 + x_3) = 1996 \cdot (-x_1x_2x_3)$, d. h. $(x_1 + x_2 + x_3) = 1996 \cdot x_1x_2x_3$. Beide Seiten der Gleichung lassen sich für $x_i \neq 0$ durch $x_1x_2x_3$ teilen und man erhält

$$\frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{1}{x_1 \cdot x_3} = 1996\,.$$

Der angegebene Term nimmt also den Wert 1996 an.[3]

Ebenfalls gelöst von Dietmar Berthold, Chemnitz.

[3] Alle symmetrischen Polynome, also Polynome der Form $p(x) = ax^3 + bx$ erfüllen auch die Voraussetzung. Da aber 0 eine Nullstelle ist, ist der gegebene Term nicht definiert.

Aufgabe 22 Die quadratische Gleichung

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0, \qquad p \in \mathbb{R}\,,$$

hat die Nullstellen a, b. Zeige: $a^4 + b^4 \geq 2 + \sqrt{2}$. (1992 Telecom Junior Contest)

Lösung (Dietmar Berthold, Chemnitz)
Aus dem Satz von Vieta folgt

$$(1) \quad -p = a + b \qquad \text{und} \qquad (2) \quad -\frac{1}{2p^2} = ab\,.$$

Durch Umformung von (2) erhält man $2ab = -1/p^2$ und $2a^2b^2 = 1/(2p^4)$. Aus (1) ergibt sich weiter $a^2 + 2ab + b^2 = p^2$ oder $a^2 + b^2 = p^2 + 1/p^2$. Damit ist $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (p^2 + 1/p^2)^2$ bzw.

$$a^4 + b^4 = (p^2 + 1/p^2)^2 - 1/(2p^4) = p^4 + 2 + 1/(2p^4)\,.$$

Durch Differenzieren der rechten Seite ergibt sich der Term $4p^3 - 2/p^5$, der bei $\pm\sqrt[8]{1/2}$ Nullstellen aufweist. Aufgrund des Vorzeichenwechsels handelt es sich bei den Punkten $E_{1,2}(\pm\sqrt[8]{1/2}; 2 + \sqrt{2}\,)$ um globale Minima, weswegen gilt: $a^4 + b^4 \geq 2 + \sqrt{2}$. [4]

Ebenfalls gelöst von Tobias Kegel, Burbach.

[4] Anm. d. Red.: Einfacher ließe sich die Abschätzung $p^4 + 2 + 1/(2p^4) \geq 2 + \sqrt{2}$ durch geeignete quadratische Ergänzung zeigen. Es ist nämlich

$$p^4 + 2 + 1/(2p^4) = \left(p^2 - \frac{1}{\sqrt{2}p^2}\right)^2 + 2 + \sqrt{2} \geq 2 + \sqrt{2}\,.$$

Aufgabe 23 Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$(x + 1998)(x + 1999)(x + 2000)(x + 2001) + 1 = 0\,.$$

(Australian Mathematical Olympiad, 1998)

Lösung (Franz Schäfer, Kaarst)
Man substituiere $x = z - 1999,5$ (Hierbei ist $1999,5$ das arithmetische Mittel der vier Summanden in den Klammern). Dies führt auf

$$(z - 1,5)(z - 0,5)(z + 0,5)(z + 1,5) + 1 = 0\,.$$

Mehrfaches Anwenden binomischer Formeln ergibt die vereinfachten Gleichungen $(z^2 - 2,25)(z^2 - 0,25) + 1 = 0$ bzw. $z^4 - 2,5 \cdot z^2 + 1,5625 = 0$ und schließlich $(z^2 - 1,25)^2 = 0$. Die Lösungen der letzten Gleichung sind $z_{1,2} = \pm\sqrt{1,25}$. Damit erfüllen die Zahlen $x_{1,2} = \pm\sqrt{1,25} - 1999,5 = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{5} - 3999)$ die ursprüngliche Gleichung.

Ebenfalls gelöst von Tobias Kegel, Burbach und Dietmar Berthold, Chemnitz.

Aufgabe 24 Es ist zu zeigen, dass die Gleichung $x^4 + 131 = 3y^4$ keine ganzzahligen Lösungen x, y haben kann. (Australian Mathematical Olympiad, 1984)

Lösung (Dietmar Berthold, Chemnitz)
Man betrachte die linke und rechte Seite der Gleichung jeweils modulo 5: $x^4 + 131 \equiv 1$ für $x \equiv 0 \pmod 5$; $x^4 + 131 \equiv 2$ für $x \equiv 1, 2, 3$ oder $4 \pmod 5$. Aber $3y^4 \equiv 0$ für $y \equiv 0 \pmod 5$ bzw. $3y^4 \equiv 3$ für $y \equiv 1, 2, 3$ oder $4 \pmod 5$. Dies ergibt einen Widerspruch.

Aufgabe 25 Gesucht sind alle Funktionen f, $D_f = \mathbb{R}$, $W_f \subseteq \mathbb{R}$, welche der Funktionalgleichung $f(u+v) \cdot f(u-v) = 2u + f(u^2 - v^2)$ genügen. Dabei sind $u, v \in \mathbb{R}$. (Australian Intermediate Contest, 1996)

Lösung (Dietmar Berthold, Chemnitz)
Soll die Funktion f der Funktionalgleichung

$$f(u+v) \cdot f(u-v) = 2u + f(u^2 - v^2)$$

genügen, so muss auch gelten:

$$\begin{aligned}
u = 0, v = x \qquad &\Rightarrow \qquad f(x) \cdot f(-x) = f(-x^2) && (1)\\
u = x, v = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad f^2(x) = f(x^2) + 2x && (2)\\
u = v = x \qquad &\Rightarrow \qquad f(2x) \cdot f(0) = f(0) + 2x && (3)\\
-u = v = x \qquad &\Rightarrow \qquad f(0) \cdot f(-2x) = f(0) - 2x && (4)
\end{aligned}$$

Aus (2) folgt mit $x = 0$ entweder $f(0) = 0$ oder $f(0) = 1$; mit $x = 1$ folgt entweder $f(1) = -1$ oder $f(1) = 2$ (aus den quadratischen Gleichungen $f^2(0) - f(0) = 0$ bzw. $f^2(1) - f(1) - 2 = 0$). Aus (3) folgt mit $x = \frac{1}{2}$: $f(1) \cdot f(0) = f(0) + 1$. Aus dieser Gleichung ergibt sich ein Widerspruch, außer für $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$. Damit folgt wieder aus (3) mit $x = \frac{z}{2}$: $f(z) = z + 1$. Die gesuchte Funktion lautet also $f(x) = x + 1$. Sie erfüllt auch die Funktionalgleichung, wie man durch Nachrechnen zeigen kann:

$$\begin{aligned}
f(u+v) \cdot f(u-v) &= (u+v+1)(u-v+1)\\
&= u^2 + 2u - v^2 + 1\\
&= 2u + (u^2 - v^2 + 1)\\
&= 2u + f(u^2 - v^2)\,.
\end{aligned}$$

Zu weiter zurückliegenden Aufgaben habe ich noch Lösungen bekommen von Tobias Reuber (Aufgabe 2), Kersten Heinrichs, Magdeburg (Aufgabe 7) und Dietmar Berthold (Aufgabe 9).

Leider sind zu den Problemen 13, 15, 19 und 20 bisher noch keine Einsendungen eingegangen. Eine Werkstatt verdient ihren Namen nur, wenn auch darin gewerkelt wird. Lassen Sie Ihrer Kreativität am Werkstoff „Aufgabe“ freien Lauf. Ihre „Produkte“ finden bestimmt zufriedene Abnehmer. Schicken Sie Ihre Lösungsvorschläge an folgende Adresse:

Paul Jainta, Werkvolkstrasse 10, 91126 Schwabach

oder als E-Mail an *paul.jainta@fuemo.de* bzw. *P.Jainta@odn.de*.

Paul Jainta, Schwabach

(erschienen in $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 12/2001, 35. Jg, S. 272)

$\sqrt{\text{WURZEL}}$ im Internet	www.wurzel.org
Werkstatt Mathematik	www.wurzel.org/werkstatt
Redaktion	*redaktion@wurzel.org*