# $^{\text{Die}}\sqrt{\text{WURZEL}}$ – Werkstatt Mathematik
## Polynome – Grundlagen

Wer lange genug über hunderten von Problemen gebrütet hat, kann bei vielen bereits erraten, aus welchem Land sie kommen. So lieben die Briten etwa die verspielte, heitere Form. Entsprechend verschnörkelt können die Wege hin zur Bestimmung numerischer Endergebnisse sein. Die Franzosen sind da eher Formalisten. Bürokratisch streng sind viele ihrer Probleme formuliert. Schmückendes Beiwerk ist offensichtlich verpönt. Russische Aufgabenstellungen dagegen gleichen einem Spiel. Man braucht nur wenig (mathematische) Hilfsmittel für diese Art von (Denk)Sport - und dennoch oder gerade deswegen kann es ein zäher Kampf werden.

Aufgaben aus den USA fallen kaum durch typische Merkmale auf, außer vielleicht durch ihre große Bandbreite. Und was ist mit Problemen made in Germany? Siehe Amerika. Mit einer Einschränkung vielleicht: Deutsche Aufgabenlöser haben offensichtlich Probleme mit Polynomen. Die restliche Welt scheint umgekehrt geradezu süchtig danach zu sein. Also beginnen wir die zweite Werkstatt Mathematik mit einer Imagekampagne für Polynomfunktionen, erster Teil.

Ein *Polynom vom Grad* $n, n \in \mathbb{N}$, in der Variablen $x$ ist ein Ausdruck der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

wobei die so genannten *Koeffizienten* $a_0,\ a_1,\ \ldots\ ,\ a_n$ reelle Zahlen sind. Ist $a_n \neq 0$, so heißt $n$ der *Grad* von $p$ (geschrieben $n = \text{grad}\,(p)$). Der Koeffizient $a_n$ ist in diesem Fall der höchste Koeffizient von $p$. Ein Polynom, dessen Koeffizienten alle Null sind, heißt *Nullpolynom*. Der konstanten Funktion $p(x) = 0$ wird kein Grad zugeordnet.

**Beispiel 1**: $p_1(x) = x^3 + 2x + 5\,,\quad p_2(x) = -x^4 + 2x^3 - 5.6x^2 - \sqrt{2}x + 4\,,$
$p_3(x) = x^7 - 9$ sind Polynome vom Grad 3 bzw. 4 bzw. 7.

Zwei Polynome $p$ und $q$ sind gleich, wenn sie in allen entsprechenden Koeffizienten übereinstimmen. Sind die Koeffizienten eines Polynoms $p$ ganze Zahlen, so hat sich der Name *ganzrationale Funktion* eingebürgert. In vielerlei Hinsicht verhalten sich Polynome denn auch wie ganze Zahlen. Man kann sie addieren, subtrahieren und multiplizieren.

**Beispiel 2**: Die Polynome $p(x) = x^2 + 3x + 1$ und $q(x) = x^2 - 3x + 4$ werden unter Anwendung des Distributivgesetzes multipliziert:

$(x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 - 3x + 4) =$
$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x^3 - 9x^2 - 3x + 4x^2 + 12x + 4 = x^4 - 4x^2 + 9x + 4.$

Ein offensichtliches Ergebnis der Multiplikation ist die folgende Aussage über den Grad des Produktpolynoms:

$$\mathsf{grad}\,(p \cdot q) = \mathsf{grad}\,(p)\ +\ \mathsf{grad}\,(q).$$

Die Division zweier Polynome ist wie die Division zweier ganzer Zahlen unbequemer, besonders wenn die Division nicht „aufgeht“.

**Beispiel 3**: Division der beiden Polynome $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ und $g(x) = x^2 + 2x + 1$ mit der Methode der Polynomdivision ergibt:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 + 4x + 4) : (x^2 + 2x + 1) = x + 1 \\
\underline{x^3 + 2x^2 + x} \\
\qquad\quad x^2 + 3x + 4 \\
\qquad\quad \underline{x^2 + 2x + 1} \\
\qquad\qquad\qquad x + 3
\end{array}$$

mit dem Quotienten $q(x) = x + 1$ und dem Rest $r(x) = x + 3$. Damit läßt sich der Term $\frac{f(x)}{g(x)}$ schreiben als

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \text{ oder } f(x) = q(x) \cdot (g(x) + r(x).$$

Das letzte Beispiel veranschaulicht ein allgemeineres Ergebnis, den so genannten
**Divisionsalgorithmus für Polynome**: Sind $f$ und $g$ Polynome über $\mathbb{R}$, dann existieren zwei eindeutig bestimmbare Polynome $q(x)$ und $r(x)$ über $\mathbb{R}$ mit $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$, wobei gilt: $\mathsf{grad}\,(r) < \mathsf{grad}\,(g)$.

**Sonderfälle**:

1) Polynom $f$ teilt Polynom $g$ ohne Rest, wenn es ein Polynom q gibt mit $g(x) = q(x) \cdot f(x)$. Das Polynom $g$ heißt dann *Vielfaches* von $f$.

2) Das Polynom $h$ heißt *größter gemeinsamer Teiler* von $f$ und $g$ (geschrieben $h = \mathrm{gg}\mathsf{T}\,(f, g)$) genau dann, wenn

i) $h$ die Polynome $f$ und $g$ teilt und
ii) ist $k$ ein weiteres Polynom mit der Eigenschaft i), dann teilt $k$ auch $h$.

Der Divisionsalgorithmus eignet sich mithin zum Auffinden des $\mathsf{ggT}$ zweier Polynome. Zu jedem größten gemeinsamen Teiler der Polynome $f$ und $g$ gibt es demnach eindeutige Polynome $s$ und $t$ mit der Eigenschaft

$$\mathsf{ggT}\,(f,g) = s(x)\cdot f(x) + t(x)\cdot g(x).$$

**Beispiel 4**: Gesucht ist ein Polynom $p$ mit folgenden Eigenschaften:
$x^2+1$ ist Teiler von $p(x)$ und $x^3+x^2+1$ ist Teiler von $p(x)+1$.

Wir suchen also Polynome $s$ und $t$, so daß gilt:

$$p(x) = (x^2+1)\cdot s(x) \quad \text{und} \quad p(x)+1 = (x^3+x^2+1)\cdot t(x).$$

Beide Bedingungen liefern $\qquad (x^2+1)\cdot s(x) = (x^3+x^2+1)\cdot t(x) - 1$
oder äquivalent hierzu $\qquad (x^3+x^2+1)\cdot t(x) - (x^2+1)\cdot s(x) = 1.$

Die letzte Zeile besagt, daß $x^3+x^2+1$ und $x^2+1$ zueinander teilerfremd sind. Wir können somit den Euklidischen Algorithmus anwenden, um $s$ und $t$ zu finden.

$$\begin{aligned} x^3+x^2+1 &= (x+1)(x^2+1) + (-x) \quad \text{(Polynomdivision)}\\ x^2+1 &= -x(-x)+1. \end{aligned}$$

Nun stellen wir jeweils nach dem Restterm um („Rückwärtsarbeiten“) und erhalten der Reihe nach

$$\begin{aligned} 1 &= (x^2+1) + x(-x)\\ &= (x^2+1) + x[(x^3+x^2+1) - (x+1)(x^2+1)]\\ &= (x^2+1)[1 - x(x+1)] + x(x^3+x^2+1)\\ &= (x^3+x^2+1)x - (x^2+1)(x^2+x-1). \end{aligned}$$

Damit bekommen wir $s(x) = x^2 + x - 1$ und $t(x) = x$. Dies liefert uns das gesuchte Polynom $p(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x - 1)$.

**Beispiel 5**: Zeige: Der Bruch $\frac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ ist für jede natürliche Zahl $n$ nicht mehr weiter kürzbar.

Wenn $\frac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ unkürzbar ist , so auch der Kehrbruch $\frac{n^4+3n^2+1}{n^3+2n}$. Mittels Polynomdivision ergibt sich nun der Reihe nach

$$\begin{aligned} n^4 + 3n^2 + 1 &= n(n^3 + 2n) + (n^2 + 1) \\ n^3 + 2n &= n(n^2 + 1) + n \\ n^2 + 1 &= n \cdot n + 1 \\ n &= n \cdot 1 \end{aligned}$$

Da $\mathsf{ggT}\,(n, 1) = 1 \Rightarrow \mathsf{ggT}\,(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.

**Beispiel 6**: Das Polynom $p$ enthält nur Terme mit ungeradem Grad. Teilt man $p$ durch $x - 3$, ist der Rest 6. Welchen Rest läßt $p$ bei Division durch $x^2 - 9$?

**Lösung**: Da $p$ nur ungerade Exponenten besitzt, ist $p$ eine sog. ‘ungerade’ Funktion, d. h. $p(-x) = -p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $p(3) = 6$ gilt daher auch $p(-3) = -6$. $P(x)$ läßt sich nach Voraussetzung schreiben als

$$p(x) = (x^2 - 9) \cdot g(x) + r(x).$$

Da $\mathsf{grad}\,(r(x)) < \mathsf{grad}\,(x^2 - 9)$, ist $r(x) = ax + b$, und wir erhalten

$$p(3) = 6 = 0 + 3a + b \;\text{ bzw. }\; p(-3) = -6 = 0 - 3a + b.$$

Dies ergibt $b = 0$ und $a = 2$. Der Restterm ist $r(x) = 2x$.

**Beispiel 7**: Welchen Rest läßt das Polynom $p(x) = x^{100} - 2x^{51} + 1$ nach Division durch $x^2 - 1$?

**Lösung**: Der Divisionsalgorithmus ergibt

$$x^{100} - 2x^{51} + 1 = (x^2 - 1) \cdot q(x) + ax + b \;\; (\mathsf{grad}\,(r(x)) < \mathsf{grad}\,(x^2 - 1)).$$

Einsetzen von $x = 1$ in die Gleichung führt zu $a + b = 0$, Einsetzen von $x = -1$ ergibt $4 = -a + b$, d. h. $b = 2$ und $a = -2$. Der Restterm ist $r(x) = -2x + 2$.

**Beispiel 8**: Es sei $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}$.
Man bestimme die Summe $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$ in Abhängigkeit von $n$.

**Lösung**: Für $x = 1$ ergibt sich durch Einsetzen die Summe aller Koeffizienten $a_i$:

$$(1+1+1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}.$$

Nun müssen wir noch alle ungeraden Koeffizienten loswerden. Für $x = -1$ erhalten wir entsprechend:

$$(1-1+1)^n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{2n}.$$

Addition der beiden Gleichungen liefert $3^n + 1 = 2 \cdot (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n})$.
Die gesuchte Summe ist $\frac{3^n+1}{2}$.

**Beispiel 9**: Zeige: Sind $a, b$ ganze Zahlen, dann läßt sich

$$f(x) = (x-a)^2(x-b)^2 + 1$$

nicht als Produkt zweier Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen.

**Lösung**: Angenommen, $f$ läßt sich wie folgt als Produkt schreiben

$$(x-a)^2(x-b)^2 + 1 = p(x) \cdot q(x).$$

Da $p(a) = q(a) = p(b) = q(b) = 1$, können wir annehmen:

$$p(x) - 1 = (x-a)(x-b) \quad \text{und} \quad q(x) - 1 = (x-a)(x-b).$$

Dies liefert

$$p(x) \cdot q(x) = [(x-a)(x-b)+1]^2 = (x-a)^2(x-b)^2 + 1 + 2 \cdot (x-a)(x-b).$$

Also wäre $(x-a)(x-b) \equiv 0$, was aber nach Voraussetzung nicht sein kann.

**Beispiel 10**: Gesucht sind alle Polynome $p$, die für bel. $x \in \mathbb{R}$ folgender Gleichung genügen:

$$x \cdot p(x-1) = (x-26) \cdot p(x). \qquad (*)$$

**Lösung**: Da gemäß Bedingung $(*)$ $x$ das Polynom $p$ teilt, folgt unmittelbar, daß $(x-1)$ ebenfalls $p(x-1)$ teilt und daher auch $(x-1)$ Teiler von $p$ ist. Ähnlich läßt sich schließen:

$$(x-2) \,|\, p(x-1) \Rightarrow (x-2) \,|\, p(x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (x-25) \,|\, p(x).$$

Somit gilt $$p(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-25) \cdot q(x)$$

und $\qquad p(x-1) = (x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-26)\cdot q(x-1).$
Eingesetzt in die Gleichung $(*)$, bekommen wir $q(x) = q(x-1)$, d. h. $q(x) = a$ (eine Konstante). Damit erfüllen alle Polynome $p$ mit

$$p(x) = a\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-25) \quad \text{die Gleichung.}$$

**Beispiel 11**: Das Polynom $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ hat ganzzahlige Koeffizienten und ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ durch 7 teilbar.
Zeige: Alle Koeffizienten $a, b, c, d$ und $e$ sind ebenfalls Vielfache von 7.

**Lösung**: Das Polynom ist nach Voraussetzung für bel. $x$ durch 7 teilbar, insbesondere für $x \in \{0, 1, -1, 2, -2\}$. Damit sind auch die Terme
$f(0) = e, \quad f(1) = a+b+c+d+e, \quad f(-1) = a-b+c-d+e,$
$f(2) = 16a+8b+4c+2d+e$ und $f(-2) = 16a-8b+4c-2d+e$
Vielfache von 7. Entsprechendes gilt für

$$a+c+e = \tfrac{1}{2}\cdot[f(1)+f(-1)], \qquad b+d = \tfrac{1}{2}\cdot[f(1)-f(-1)],$$

$$16a+4c+e = 4(4a+c)+e = \tfrac{1}{2}\cdot[f(2)+f(-2)] \text{ und } 4b+d = \tfrac{1}{4}\cdot[f(2)-f(-2)].$$

Wegen $4a+c-(a+c) = 3a$ muß auch $a$ durch 7 teilbar sein. Analog schließt man die Teilbarkeit durch 7 für $b, c$ und $d$ (z. B. gilt $4a+c-4(a+c) = -3c$).

Soviel zu Polynomen für dieses Mal. Aufgabe 6 wird das Eingangsthema nochmals variieren. Bevor wir zu den Lösungen der ersten Probleme kommen, gibt es den nächsten Fünferpack zu entwirren. Bis auf die erste Frage stammen in dieser Runde alle Aufgaben aus den USA.

**Aufgabe 6**: Man ermittle alle Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, für welche das Polynom $x^4 + ax^2 + b$ durch das Polynom $x^2 + ax + b$ teilbar ist.

**Aufgabe 7**: Es sei $S$ eine Teilmenge der Menge $M = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ mit folgender Eigenschaft: Sind $a$ und $b$ zwei (nicht notwendig verschiedene) Elemente aus $S$, dann liegt ihr Produkt $a\cdot b$ nicht in $S$. Wie viele Elemente kann $S$ höchstens haben?

**Aufgabe 8**: Welchen Inhalt hat die Fläche, die vom Graph der Relation $|x-60| + |y| = \left|\frac{x}{4}\right|$ begrenzt wird?

**Aufgabe 9**: Gegeben ist ein reguläres Fünfeck $PQRST$ mit Seitenlänge $a$. Die Diagonale [PS] hat die Länge $b$. Zeige: $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} = 1$.

**Aufgabe 10:** Das nebenstehende Diagramm ist so mit natürlichen Zahlen auszufüllen, daß in jeder Zeile und jeder Spalte eine fünfgliedrige arithmetische Folge entsteht.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | 74 | | | |
| | | | | 186 |
| | | 103 | | |
| 0 | | | | |

Die elegantesten Lösungen sollen regelmäßig an dieser Stelle veröffentlicht werden. Hierzu sind Lösungsvorschläge an folgende Adresse erbeten:

**Paul Jainta, Werkvolkstraße 10, 91126 Schwabach**

Oder als e-mail: PaulJainta@aol.com bzw. P.Jainta@odn.de

Für weitere Anregungen, Hinweise oder Anmerkungen bin ich sehr dankbar.

*Paul Jainta, Schwabach*