
Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ – Werkstatt Mathematik
Polynome – Grundlagen Teil II

Polynome nur zu addieren, multiplizieren oder dividieren ist auf die Dauer langweilig. Polynome können mehr. Zum Beispiel ist es manchmal gar nicht so einfach, ihre Nullstellen zu finden. Wir haben in der letzten Werkstatt den Divisionsalgorithmus für Polynome vorgestellt. Ein Spezialfall dieses Satzes ist der

Restsatz: Wird ein Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ durch $(x - a)$ dividiert, dann ist $p(a)$ der Rest.

Beispiel 1 Polynomdivision von $p(x) = x^3 - 2x + 3$ durch $x + 2$ liefert: $x^3 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 2) \cdot (x + 2) - 1$ mit dem Rest $-1 = p(-2)$.

Man sieht schnell ein, warum der Restsatz allgemein gilt. Nach dem Divisionsalgorithmus ist nämlich $p(x) = q(x) \cdot (x - a) + r$. Diese Gleichung ist eine so genannte Identität; sie ist für alle Werte x erfüllt. Insbesondere gilt: $p(a) = q(a)(a - a) + r = r$. Der letzte Schritt stellt manchmal sogar ein nützliches Werkzeug dar („Einsetzen geeigneter Werte“).

Aus dem Restsatz folgt unmittelbar der

Faktorsatz: Ist a eine Nullstelle des Polynoms $p(x)$, dann ist $(x - a)$ ein Teiler des Polynoms, d. h. $p(x) = q(x) \cdot (x - a)$, wobei $\text{grad}(q(x)) = \text{grad}(p(x)) - 1$.

Aber: Woher wissen wir eigentlich, ob ein Polynom überhaupt eine Nullstelle hat? Eine Garantie gibt der

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom $p(x)$ mit $\text{grad}(p(x)) > 0$ besitzt in der Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen mindestens eine komplexe Nullstelle. (1)

(In einer späteren Werkstatt werde ich näher auf die Menge \mathbb{C} eingehen). Der Satz hat sehr weitreichende Anwendungen. Sein Nachweis ist mühsam und würde den Rahmen dieser Ecke sprengen. Eine Folgerung von (1) ist die Tatsache, dass ein Polynom vom Grad n genau n (komplexe) Lösungen hat, die aber nicht notwendig alle verschieden sein müssen. Man kann also ein Polynom (über \mathbb{C}) auf folgende Weise darstellen: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$,

wobei die r_i , $1 \leq i \leq n$, die Nullstellen des Polynoms sind. Dabei müssen nicht alle Nullstellen verschieden sein, sie können mit der Vielfachheit k_i auftreten.

Beispiel 2 Das Polynom vom Grad 8, $p(x) = (x-1)(x-2i)(x+2i)(x-7)^3(x+6)^2$ hat demnach acht Nullstellen, aber nur fünf verschiedene ($r_4 = 7$ ist 3-fache, $r_5 = -6$ zweifache Nullstelle).

Das nachfolgende, etwas anspruchsvollere Beispiel aus der US-Olympiade 1975 gibt einen ungefähren Eindruck von der Tragweite des fundamentalen Satzes (1). Ganz nebenbei fällt noch ein weiteres nützliches Werkzeug ab.

Beispiel 3 Das Polynom p hat den Grad n und nimmt für $k = 0, 1, 2, \dots, n$ die Werte $p(k) = \frac{k}{k+1}$ an. Bestimme den Wert $p(n+1)$.

Lösung: Wir machen uns eine andere Formulierung des Faktorsatzes zu Nutze: Kennt man alle Nullstellen eines Polynoms, so kennt man auch das Polynom selbst. Also wollen wir versuchen, aus den gegebenen Bedingungen auf die Nullstellen des unbekanntes Polynoms zu schließen bzw. ein Hilfspolynom zu konstruieren, dessen Nullstellen nach einer geringfügigen algebraischen Umformung offensichtlich sind. Die Polynomwerte $p(k) = \frac{k}{k+1}$ sagen noch wenig über die Nullstellen von p aus, denn die rechte Seite verschwindet nur für $k = 0$ und ist kein Polynom. Wir können aber auf beiden Seiten mit $(k+1)$ multiplizieren und k subtrahieren: $(k+1) \cdot p(k) - k = 0$.

Damit bekommen wir auf Umwegen ein geeignetes Polynom q . Setzen wir etwa $q(x) := (x+1) \cdot p(x) - x$, dann haben wir ein Polynom vom Grad $n+1$ mit den $n+1$ verschiedenen Nullstellen $r_1 = 0, r_2 = 1, \dots, r_{n+1} = n$, wie man durch Nachrechnen schnell sehen kann. Dieses Werkzeug heißt übrigens „Aufstellen einer passenden Funktion“.

Wir können nun schreiben:

$$q(x) = (x+1) \cdot p(x) - x = C \cdot x(x-1)(x-2) \cdots (x-n) \quad (2)$$

Der konstante Faktor C lässt sich durch Einsetzen geeigneter Werte von x bestimmen. Die linke Seite der letzten Gleichung enthält den Term $(x+1) \cdot p(x)$, der für $x = -1$ den Wert null annimmt. Wir erhalten daher durch Einsetzen $1 = C \cdot (-1)(-2)(-3) \cdots (-(n+1))$ und damit $C = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, wobei $(n+1)!$ die so genannte Fakultät ist, eine Abkürzung für das Produkt der ersten $n+1$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

Zur Bestimmung des Wertes $p(n+1)$, setzen wir in (2) $x = n+1$ ein: $(n+2) \cdot p(n+1) - n - 1 = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot (n+1) \cdot n \cdots 1 = (-1)^{n+1}$ und daraus ergibt sich $p(n+1) = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}$.

Die nächsten beiden Beispiele sind in der Finalrunde der 48. Nationalen Mathematik Olympiade in Rumänien (1997) gestellt worden (Klassen 8, 9).

Beispiel 4 Gegeben ist das Polynom $p(x) = x^{1997} - x^{1995} + x^2 - 3kx + 3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Zeige:

a) Das Polynom besitzt keine ganzzahligen Nullstellen.

b) Die Zahlen $p(n)$ und $p(n) + 3$ sind für jedes $n \in \mathbb{Z}$ zueinander teilerfremd.

Lösung: a) Angenommen, $p(x) = 0$ hat die ganzzahlige Nullstelle r , dann gilt: $p(x) = (x-r)q(x)$, wobei q nur ganzzahlige Koeffizienten hat. Einsetzen geeigneter x -Werte liefert: $p(-1) = (-1-r) \cdot q(-1) = 6k+2$, $p(0) = (-r) \cdot q(0) = 3k+1$ und $p(1) = (1-r) \cdot q(1) = 2$. Die Zahlen $-1-r$, r und $1-r$ sind drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen und daher ist genau eine durch drei teilbar. Da aber $6k+2$, $3k+1$ und 2 bei Division durch drei stets die Reste 1 oder 2 lassen und $q(-1)$, $q(0)$ und $q(1)$ ebenfalls ganze Zahlen sind, ergibt sich ein Widerspruch zur Ganzzahligkeit.

b) Der größte gemeinsame Teiler (=ggT) von $p(n)$ und $p(n) + 3$ kann nur 1 oder 3 sein. Nun ist aber $p(n) = n^{1994} \cdot (n^3 - n) - 3k \cdot (n-1) + n^2 + 1 = n^{1994}(n-1)n(n+1) - 3k(n-1) + n^2 + 1$. Die Zahlen $n-1$, n , $n+1$ sind aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, also teilt die Zahl 3 das Produkt $n^3 - n$; 3 ist auch Teiler von $3k(n-1)$ aber nicht von $n^2 + 1$. (Jede Quadratzahl lässt bei Division durch 3 die Reste 0 oder 1, daher ist $n^2 + 1 \equiv 1; 2 \pmod{3}$.) Also ist $p(n)$ kein Vielfaches von 3, d.h. ggT $(p(n), p(n) + 3) = 1$.

Beispiel 5 Das Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, genügt der Bedingung $f(2) + f(5) < 7 < f(3) + f(4)$ (3)

Zeige: Es gibt $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u + v = 7$ und $f(u) + f(v) = 7$ (4)

Lösung: Die Forderung (4) besagt: Die Gleichung $f(u) + f(7-u) = 7$ besitzt mindestens eine Lösung in \mathbb{R} . Wir betrachten dazu das Polynom $g(u) = f(u) + f(7-u) - 7$. Offensichtlich ist g ein Polynom mit einem Grad kleiner als 3 (die Terme au^3 und $a(-u)^3$ heben sich weg). Wir setzen wieder geeignete x -Werte ein und erhalten: $g(2) = f(2) + f(5) - 7 < 7 - 7 = 0$

(wg. (3)), bzw. $g(3) = f(3) + f(4) - 7 > 7 - 7 = 0$, d.h. g besitzt als stetige Funktion im Intervall $(2; 3)$ mindestens eine Nullstelle (Satz von Rolle), woraus die Behauptung folgt.

Beispiel 6 Das Polynom $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ hat ganzzahlige Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n . Zeige: Wenn es vier verschiedene ganze Zahlen a, b, c und d gibt mit $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$, dann gibt es kein $k \in \mathbb{Z}$ mit $f(k) = 8$.

Lösung: Es sei $g(x) := f(x) - 5$. Das Polynom g hat nach Voraussetzung vier verschiedene Nullstellen a, b, c, d ; daher gilt nach dem Fundamentalsatz: $g(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \cdot h(x)$ mit $h(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$, und $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ mit $f(k) = 8$ müsste also gelten: $(k - a)(k - b)(k - c)(k - d) \cdot h(k) = 8 - 5 = 3 = (\pm 1) \cdot (\pm 3)$. Da sich die Zahl 3 nur als Produkt von maximal drei verschiedenen ganzen Zahlen darstellen lässt, müssten zwei der vier Linearfaktoren $(ka), (kb), (kc), (kd)$ entweder 1 oder -1 sein, was aber wegen $a \neq b \neq c \neq d$ jedoch nicht möglich ist.

Beispiel 7 Gegeben sind ein Polynom p mit ganzzahligen Koeffizienten und drei verschiedene Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Können die drei Gleichungen $p(a) = b, p(b) = c$ und $p(c) = a$ gleichzeitig erfüllt sein? (USAMO 1979)

Lösung: Nein, es ist nicht möglich. Da $p(x)$ nur ganzzahlige Koeffizienten besitzt und a, b, c verschiedene Zahlen aus \mathbb{Z} sind, folgt aus dem Faktorsatz, dass auch $\frac{p(a)-p(b)}{a-b}, \frac{p(b)-p(c)}{b-c}$ und $\frac{p(c)-p(a)}{c-a}$ ganzzahlig sein müssen. Angenommen, die Gleichungen $p(a) = b, p(b) = c$ und $p(c) = a$ gelten. Damit sind auch die Terme $\frac{b-c}{a-b}, \frac{c-a}{b-c}$ und $\frac{a-b}{c-a}$ ganze Zahlen und ihr Produkt ist 1. Dann haben alle Bruchterme den Betrag 1 haben und damit ist $|a - b| = |b - c| = |c - a|$. Dies ist jedoch wegen $a \neq b \neq c$ nicht möglich.

Beispiel 8 Zerlege den Term $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)$ in ein Produkt.

Lösung: Wir interpretieren den Term als Polynom $P(a, b, c)$ der drei Variablen a, b, c . Wegen $P(a, -a, c) = c^3 - c^3 = 0$, ist nach dem Faktorsatz $a + b$ ein Teiler von $P(a, b, c)$. Aus Symmetriegründen sind auch $b + c$ und $c + a$ Teiler von P . Wir können daher $P(a, b, c)$ wie folgt in ein Produkt zerlegen: $P(a, b, c) = k \cdot (a + b)(b + c)(c + a)$, wobei $k \in \mathbb{R}$ ein noch zu bestimmender Faktor ist. Setzen wir $a = b = c = 1$, ergibt sich wegen $P(1, 1, 1) = 3^3 - 3 = k \cdot 8$ hieraus $k=3$. Damit lässt sich der Term faktorisieren: $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(b + c)(c + a)$.

Soviel zu Polynomen für dieses Mal. Aufgabe 11 wird – wie üblich – das aktuelle Thema aufgreifen. Die übrigen vier

Aufgaben wurden bereits bei kroatischen Wettbewerben erfolgreich getestet. Viel Spaß nun bei der Beschäftigung mit den Problemen aus Osteuropa.

Aufgabe 11 Man zeige: Ein Polynom $f(x)$ über der Menge \mathbb{Z} hat keine ganzzahlige Nullstelle, wenn $f(0)$ und $f(1)$ beide ungerade sind.

Aufgabe 12 Wie viele arithmetische Folgen mit positiven ganzzahligen Gliedern und folgender Eigenschaft sind möglich: Die Summe der ersten 37 Folgenglieder ist 1998.

Aufgabe 13 Gegeben ist ein Tetraeder, bei dem nur eine einzige Kante eine Länge größer 1 hat. Welches maximale Volumen kann es haben?

Aufgabe 14 Kann es eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden beiden Eigenschaften geben? $f(1 + f(x)) = 1 - x$ und $f(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 15 Man zeige: Zwischen je 79 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen liegt mindestens eine Zahl, deren Quersumme durch 13 teilbar ist. Man gebe eine entsprechende Folge von 78 Zahlen an, bei der dies nicht der Fall ist.

Die elegantesten Lösungen sollen regelmäßig an dieser Stelle veröffentlicht werden. Hierzu sind Lösungsvorschläge an folgende Adresse erbeten:

Paul Jainta, Werkvolkstraße 10, 91126 Schwabach

Oder als e-mail: PaulJainta@aol.com bzw. P.Jainta@odn.de

Für weitere Anregungen, Hinweise oder Anmerkungen bin ich sehr dankbar.

Die Lösungen zu den Problemen 6 bis 10 sollen in der nächsten Ausgabe der ‘Werkstatt’ erscheinen. Es können also noch Auflösungen hierzu nachgereicht werden.

Paul Jainta, Schwabach