$^{\text{Die}}\sqrt{\text{WURZEL}}$ – Werkstatt Mathematik
Polynome – Teil III oder Probleme lösen mit Quadratfunktionen

Es passiert im Alltagsgeschehen oft, dass mit Kanonen auf Spatzen geschossen wird. Auch in der Mathematik – vor allem im schulischen Matheunterricht – begegnet einem gelegentlich die Unsitte, mit einem riesigen Formelapparat läppische Fragen regelrecht tot zu schlagen. Dies ist nicht die feine Art, mathematische Probleme aus der Welt zu schaffen. Eleganter wäre in solchen Fällen, mit einfacheren Mitteln überzeugende Ergebnisse – auch zu scheinbar schwierigen Problemen – hervorzuzaubern. Bestes Beispiel: Die Quadratfunktion.

Jeder kennt das Gebilde aus der neunten Klasse. Was kann man mit den so genannten Parabeln noch anderes anstellen, als immer nur Nullstellen und Scheitelpunkte zu finden? Betrachten wir also ein Polynom vom Grad zwei der Gestalt $f(x) = ax^2 + bx + c$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Um eventuell vorhandene Nullstellen einer quadratischen Funktion aufzuspüren, führt der Weg meistens über die Lösungsformel einer quadratischen Gleichung:

$$0 = f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (*) \quad \Longrightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Der Radikand $D = b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante der Gleichung $(*)$. Damit lassen sich die beiden Lösungen kürzer schreiben: $x_{1/2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{D})$. Ob die Gleichung $(*)$ in $\mathbb{R}$ lösbar ist oder nicht, entscheidet diese Diskriminante (daher der etwas schwerfällige Name – discriminare (lat.) bedeutet trennen, absondern). Die folgende Tabelle führt drei mögliche Fälle auf:

Diskriminante	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
Art der Lösung	zwei komplexe Lösungen	reelle Doppellösung	zwei reelle Lösungen

Dieser Sachverhalt liefert uns nun zwei bedeutsame Hilfsmittel zur Lösung etwas schwierigerer Fragen.

1) Anwenden der Lösungsformel z. B. bei der Untersuchung einer verzwickten Gleichung, die man durch geschickte Umdeutung auf eine quadratische zurückführen kann.

2) Die so genannte **quadratische Ergänzung** eines algebraischen Terms zum vollständigen Quadrat.

Was darunter zu verstehen ist, zeigt die folgende Umformung:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x) + c \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c \\ &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a} \, . \end{aligned}$$

Da nun $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ für alle x ist, können wir die Funktionswerte von f nach unten (oben) abschätzen: $f(x) \geq -\frac{D}{4a}$ für $a > 0$ (d. h. f nimmt einen kleinsten Wert an) bzw. $f(x) \leq -\frac{D}{4a}$ für $a < 0$ (f hat also einen Maximalwert).

Zusammengefasst: $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann wenn $a > 0$ und $D \leq 0$ bzw. $f(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann wenn $a < 0$ und $D \geq 0$. Bei den folgenden Beispielen erkennt man gut die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten von 1) und 2).

Beispiel 1 Welchen kleinsten Wert kann der Term $T(x) = x^2 - 8x + 21$ für $x \in \mathbb{R}$ annehmen?

Lösung: Wir ergänzen T zu einem vollständigen Quadrat, indem wir zu $x^2 - 8x$ die Zahl 16 addieren: $x^2 - 8x + 21 = x^2 - 8x + 16 + 5 = (x - 4)^2 + 5$. Da das Quadrat $(x - 4)^2$ nicht negativ werden kann, ergibt sich für $x = 4$ der kleinste Wert $T(4) = 5$. Diese Methode klappt auch, wenn mehrere Variablen im Spiel sind.

Beispiel 2 Welchen Mittelpunkt M hat die Ellipse mit der Gleichung $4x^2 + 6y^2 - 24x + 12y = 20$?

Lösung: Wir ordnen zuerst die Variablen und klammern geeignete Faktoren aus: $4(x^2 - 6x) + 6(y^2 + 2y) = 20$. Durch passende Addition können wir die beiden Klammerterme zu vollständigen Quadraten ergänzen: $4(x^2 - 6x) + 36 + 6(y^2 + 2y) + 6 = 62$ bzw. $4(x^2 - 6x + 9) + 6(y^2 + 2y + 1) = 62$ oder $4(x - 3)^2 + 6(y + 1)^2 = 62$. Dies ist die so genannte Mittelpunktsgleichung der Ellipse. Der Punkt $M(3, -1)$ ist ihr Zentrum.

Beispiel 3 Gibt es eineindeutige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft: $f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}$?
(Hierbei bedeutet: $f^2(x) = [f(x)]^2$)

Lösung: Es gibt keine reelle Funktion mit dieser Eigenschaft. Dazu schauen wir uns die Zahlen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ an, die beim Quadrieren ‚etwas aus der Rolle fallen'. Für beide Belegungen soll nach Voraussetzung gelten: $f(0) - f^2(0) \geq \frac{1}{4}$ bzw. $f(1) - f^2(1) \geq \frac{1}{4}$. Beide Ungleichungen können wir bei Anwendung der binomischen Formel $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ umformen: $[f(0) - \frac{1}{2}]^2 \leq 0$ bzw. $[f(1) - \frac{1}{2}]^2 \leq 0$. Daraus folgt aber $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$, d. h. die Funktion f ist dann nicht mehr eineindeutig. Daher gibt es keine Funktion mit der geforderten Eigenschaft.

Beispiel 4 Man zeige: Mindestens eine der Zahlen $a - b^2$, $b - c^2$, $c - a^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist kleiner oder gleich $\frac{1}{4}$.

Lösung: Wir nehmen an, alle drei Zahlen sind größer als $\frac{1}{4}$. Dann ist $a - b^2 + b - c^2 + c - a^2 > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ oder $a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c < -\frac{3}{4}$. Dreimalige quadratische Ergänzung ergibt schließlich $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 < 0$, was aber wegen der Quadrate nicht sein kann. Die Annahme ist daher falsch.

Manchmal ergeben sich durch geschickte algebraische Manipulation(en) von selbst quadratische Terme. Man muss nur einen Blick dafür entwickeln:

Beispiel 5 Bestimme alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, welche das Gleichungssystem erfüllen:

$$x^2 = 4(y - 1) \qquad y^2 = 4(z - 1) \qquad z^2 = 4(x - 1)$$

Lösung: Addition der beiden Seiten des Systems führt auf $x^2 + y^2 + z^2 = 4(y - 1 + z - 1 + x - 1)$. Ausmultiplizieren der Klammer und Umstellen ergibt $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = 0$. Hier stehen also bereits drei Quadratterme, die Gleichung verkürzt sich zu: $(x - 2)^2 + (y - 2)2 + (z - 2)^2 = 0$. Die einzige Lösung dieser Gleichung und damit des Gleichungssystems ist das Tripel $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

Gelegentlich lässt sich ein vollständiges Quadrat auch durch gleichzeitige Addition und Subtraktion des „passenden" gemischten Gliedes herstellen.

Beispiel 6 Zerlege $4a^4 + b^4$ in ein Produkt.

Lösung: Wir ‚schieben' zwischen die Summanden $4a^4$ und b^4 den Term $4a^2b^2$ ein und ziehen ihn gleich wieder ab:

$$4a^4 + b^4 = 4a^4 + 4a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 = (2a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2 = (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2).$$

Ein anderes, ersprießliches Anwendungsfeld sind Ungleichungen.

Beispiel 7 Zeige die Gültigkeit von $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq \frac{3}{4}(a-b)^2$.

Lösung: Der Ungleichungstyp ist gewöhnungsbedürftig, denn die linke Seite enthält die Variable c, die rechts nicht auftaucht. Schauen wir uns also die linke Seite genauer an. Sie erinnert an drei unvollständige quadratische Terme. In der Tat können wir schreiben: $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$. Wie kriegt man aber die Variable c weg? Wegen $(x-y)^2 \geq 0$ ist auch $x^2-2xy+y^2 \geq 0$ bzw. $x^2+y^2 \geq 2xy$. Addiert man auf beiden Seiten nochmals x^2+y^2, folgt $2x^2+2y^2 \geq x^2+2xy+y^2$ und damit $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 \quad (*)$. Jetzt können wir c los werden, denn wegen $(*)$ gilt $(b-c)^2+(c-a)^2 \geq \frac{1}{2}\left[(b-c)+(c-a)\right]^2 = \frac{1}{2}(b-a)^2$. Damit lässt sich die linke Seite der gegebenen Ungleichung folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}\Big[(a-b)^2+\underbrace{(b-c)^2+(c-a)^2}_{\geq\frac{1}{2}(b-a)^2}\Big] \\ &\geq \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-a)^2\right] = \frac{3}{4}(a-b)^2\,. \end{aligned}$$

Beispiel 8 Welchen minimalen Wert nimmt der Term $T(x,y,z) = x^4+y^4+z^4-4xyz$ an? ($x,y,z \in \mathbb{R}$)

Lösung: Wir müssen die Summanden x^4, y^4 und z^4 geschickt zu Quadraten ergänzen. Dazu subtrahieren wir die Terme $2x^2y^2$ und $2z^2-1$ und fügen Sie am Ende wieder hinzu:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= x^4-2x^2y^2+y^4+z^4-2z^2+1-4xyz+2x^2y^2+2z^2-1 \\ &= (x^2-y^2)^2+(z^2-1)^2+2(x^2y^2-2xyz+z^2)-1 \\ &= (x^2-y^2)^2+(z^2-1)^2+2(xy-z)^2-1. \end{aligned}$$

Da jetzt auf der rechten Seite drei quadratische Terme stehen, kann $T(x,y,z)$ nicht kleiner als -1 werden, die zum Beispiel für die Belegung $x=y=z=1$ angenommen wird.

Zum Schluss noch einige ungewohnte Anwendungen der Diskriminante.

Beispiel 9 Gegeben ist ein allgemeines Dreieck mit den Innenwinkeln α, β, γ. Für den Ausdruck $\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})$ gebe man eine obere Schranke an.

Lösung: Wir haben $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Der gegebene Term soll y heißen: $\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) + y = 0$. Die erhaltene Gleichung können wir nun als quadratische Gleichung für $\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$ ansehen. Die Diskriminante hat den Wert $D = \cos^2(\frac{\alpha-\beta}{2}) - 4y$. Damit die Gleichung reelle Lösungen hat, muss $D \geq 0$ sein. Daraus ergibt sich $y \leq \frac{1}{4}\cos^2(\frac{\alpha-\beta}{2}) \leq \frac{1}{4}$, da $\cos^2(\frac{\alpha-\beta}{2}) \leq 1$. Somit ist $\frac{1}{4}$ eine obere Schranke für den gegebenen Term.

Beispiel 10 Zeige: $x^2 - xz + z^2 + 3y(x + y - z) \geq 0 \ \ (*)$ für $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Lösung: Wir betrachten die linke Seite der Ungleichung als quadratische Funktion in der Variablen x: $f(x) = x^2 - xz + z^2 + 3y(x + y - z)$ mit den Parametern y und z. Nach Ausklammern und Zusammenfassen von y und z ist $f(x) = x^2 + x \cdot (3y - z) + 3y \cdot (y - z) + z^2$. Die Gleichung $f(x) = 0$ hat die Diskriminante $D = (3y - z)^2 - 4 \cdot (3y^2 - 3yz + z^2) = -3y^2 + 6yz - 3z^2 = -3 \cdot (y^2 - 2yz + z^2) = -3 \cdot (y - z)^2 \leq 0$ für alle $y, z \in \mathbb{R}$. Der Koeffizient des x^2-Terms ist $a = 1$ und daher ist nach Bedingung 1) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist $(*)$ gezeigt.

Beispiel 11 Für die Innenwinkel α, β, γ eines Dreiecks gilt: $\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma} = \sqrt{3} \ \ (*)$. Von welcher Art ist das Dreieck?

Lösung: Wegen $\tan\gamma = \tan[\pi - (\alpha+\beta)] = -\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{-1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ können wir $(*)$ auch so schreiben: $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha \cdot \tan\beta} + \frac{\tan\alpha \cdot \tan\beta - 1}{\tan\alpha + \tan\beta} = \sqrt{3}$. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $a := \tan\alpha$, $b := \tan\beta$ und erhalten $\frac{a+b}{ab} + \frac{ab-1}{a+b} = \sqrt{3} \ \ (**)$. Nach Beseitigung der Bruchterme und geeignetem Ausklammern reduziert sich $(**)$ auf $a^2(b^2 - \sqrt{3}\,b + 1) + a(b - \sqrt{3}\,b^2) + b^2 = 0 \ \ (***)$. Dies ist nun eine quadratische Gleichung in a. Damit sie lösbar wird, muss gelten: $D = (b - \sqrt{3}\,b^2)^2 - 4 \cdot (b^2 - \sqrt{3}\,b + 1) \cdot b^2 \geq 0$. Nach Vereinfachung ist $D = -b^2 \cdot (b - \sqrt{3}\,)^2$. Für $b = \sqrt{3}$ verschwindet D. Hätten wir in Gleichung $(***)$ nach Potenzen von b sortiert, hätte sich die analoge Gleichung $b^2 \cdot (a^2 - \sqrt{3}\,a + 1) + b \cdot (a - \sqrt{3}\,a^2) + a^2 = 0$ ergeben mit $D = 0$ für $a = \sqrt{3}$. Die Bedingung $(*)$ ist daher nur für $a = \tan\alpha = \sqrt{3}$ und $b = \tan\beta = \sqrt{3}$ zugleich erfüllt d. h. für $\alpha = \beta = 60^\circ$. Das Dreieck ist gleichseitig.

Beispiel 12 (Suzhou Secondary School Mathematics Competition 1983, China)
Für welche reellen Werte x wird der Term $T = \frac{x^2-2x+4}{x^2-3x+3}$ ganzzahlig?

Lösung: Durch Polynomdivision lässt sich T in einen ganzrationalen und einen echt gebrochenrationalen Anteil zerlegen: $T(x) = 1 + \frac{x+1}{x^2-3x+3}$. Damit T ganzzahlig wird, muss der Restterm $r = \frac{x+1}{x^2-3x+3}$ eine ganze Zahl ergeben. Multiplikation mit dem Nenner und Sortieren nach fallenden Exponenten führt auf die quadratische Gleichung $rx^2 - (3r+1)x + 3r - 1 = 0$. Da x reell ist, muss $D = (3r+1)^2 - 4r(3r-1) \geq 0$ werden bzw. nach Vereinfachung $3r^2 - 10r - 1 \leq 0$. Die Lösungsmenge dieser Ungleichung erhalten wir durch quadratische Ergänzung:

$$r^2 - \frac{10}{3}r - \frac{1}{3} \leq 0 \iff \left(r - \frac{5}{3}\right)^2 \leq \frac{28}{9} \iff \left|r - \frac{5}{3}\right| \leq \sqrt{\frac{28}{9}}$$
$$\iff -1 < -\frac{2}{3}\sqrt{7} + \frac{5}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}\sqrt{7} + \frac{5}{3} < 4\,.$$

Da r ganzzahlig sein soll, sind nur die Werte 0, 1, 2 und 3 möglich. Dafür ergeben sich als Lösungen $x_1 = -1$, $x_{2/3} = 2 \pm \sqrt{2}$, $x_{4/5} = \frac{7\pm3}{4}$, $x_{6/7}\frac{10\pm2}{6}$. Man kann leicht nachprüfen, dass diese Werte den Term T ganzzahlig machen.

Beispiel 13 Gegeben ist eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Man zeige: Sind die Koeffizienten a, b und c alle ungerade, dann hat die Gleichung nur irrationale Lösungen.

Lösung: Wir zeigen: Die Diskriminante der Gleichung ist keine Quadratzahl. Wenn a, b, c ungerade ganze Zahlen sind, muss $D = b^2 - 4ac$ ebenfalls ungerade sein. Die Quadrate ungerader ganzer Zahlen sind von der Form $8k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, denn für $n \in \mathbb{Z}$ ist $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1 = 8k + 1$ (da eine der Zahlen n, $n+1$ gerade sein muss). Weil a, b, c ungerade sind, können wir schreiben: $a = 2m+1$, $b = 2n+1$, $c = 2r+1$ (m, n, $r \in \mathbb{Z}$). Dies ergibt für die Diskriminante: $D = (2n+1)^2 - 4(2m+1)(2r+1) = 4n(n+1) + 1 - 4 \cdot [4mr + 2(m+r) + 1] = 8 \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2} - 2mr - (m+r)\right] - 3$.
Die Diskriminante hat aber nicht die Form $8k + 1$, ist daher keine Quadratzahl.

Das Vorstehende kann nun gleich an Aufgabe 16 ausprobiert werden. Die restlichen Probleme sind noch ganz frisch, sie wurden im April 2000 den Teilnehmern am Gebietswettbewerb der 31. Österreichischen Mathematik Olympiade vorgelegt. Viel Spaß nun bei der Beschäftigung mit den Schmankerln aus dem Nachbarland.

Aufgabe 16 Gesucht sind alle reellen Lösungen der Wurzelgleichung:

$$\sqrt{3x^2 - 18x + 52} + \sqrt{2x^2 - 12x + 162} = \sqrt{-x^2 + 6x + 280}$$

Aufgabe 17 Für welche natürlichen Zahlen n gilt: $2^n > 10n^2 - 60n + 80$?

Aufgabe 18 Zu jeder reellen Zahl a bestimme man alle reellen x, die der Gleichung $(2x+1)^4 + ax(x+1) - \frac{a}{2} = 0$ genügen.

Aufgabe 19 Wir betrachten zwei Kreise $k_1(M_1, r_1)$ und $k_2(M_2, r_2)$ mit $z = \overline{M_1M_2} > r_1 + r_2$ und einer gemeinsamen äußeren Tangente mit den Berührpunkten P_1 und P_2. Die Berührpunkte liegen auf derselben Seite der Zentrale M_1M_2. Wir verändern nun die Radien so, dass ihre Summe $r_1 + r_2 = c$ konstant bleibt. Welche Menge von Punkten durchläuft der Mittelpunkt der Tangentenstrecke P_1P_2, wenn r_1 von 0 bis c variiert wird?

Aufgabe 20 Gegeben ist die durch die Rekursion $u_{n+1} = \frac{u_n(u_n+1)}{n}$ für $n \geq 1$ definierte Folge (u_n).

a) Man bestimme die Folgenglieder für $u_1 = 1$.

b) Man zeige: Ist ein Folgenglied nicht ganzzahlig, so sind auch alle nachfolgenden Glieder nicht ganzzahlig.

c) Man zeige: Zu jeder natürlichen Zahl K gibt es ein $u_1 > 1$, so dass die ersten K Folgenglieder natürliche Zahlen sind.

Die elegantesten Lösungen sollen regelmäßig an dieser Stelle veröffentlicht werden. Hierzu sind Lösungsvorschläge an folgende Adresse erbeten:

Paul Jainta, Werkvolkstrasse 10, 91126 Schwabach

oder als e-mail: PaulJainta@aol.com bzw. P.Jainta@odn.de

Für weitere Anregungen, Hinweise oder Anmerkungen bin ich sehr dankbar.

Paul Jainta, Schwabach