$^{\text{Die}}\sqrt{\text{WURZEL}}$ – Werkstatt Mathematik

Polynome – Teil IV: Hilfspolynome oder Eine Erweiterung des Satzes von VIETA.

Was hat ein Gleichungssystem der Art

$$x + y + z = 5 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 29 \qquad xyz = -24$$

mit Polynomen zu tun? Es ist sicherlich nicht ganz einfach zu lösen. Aber wo stehen hier Polynome? Wir werden es gleich sehen: Manchmal lassen sich Fragestellungen einfach dadurch entschärfen, indem man sie auf das Problem zurückführt, die Lösungen einer einfacheren Gleichung zu finden. Dazu ist es aber in der Regel notwendig, ein Polynom aufzustellen, dessen Nullstellen die gesuchten Lösungen des Anfangsproblems sind. Diese so genannten **Hilfspolynome** sind in unterschiedlichen Anwendungssituationen einsetzbar.

Gegeben sind zwei reelle Zahlen u und v. Das einfachste (normierte) Polynom mit den Nullstellen u und v hat nach dem Faktorsatz den Grad 2: $p(x) = (x-u)(x-v) = x^2 + px + q$. Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und Vergleichen der entsprechenden Koeffizienten ergibt nun

$$p = -(u+v) \quad \text{und} \quad q = uv\,. \tag{1}$$

Dieses Ergebnis ist bereits aus dem regulären Mathematikunterricht bekannt (Satz von VIETA). Der Satz ist auch gültig für allgemeine Quadratfunktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sind etwa $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ und ist $a \neq 0$, können wir durch a dividieren und erhalten: $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ $(*)$. Wie oben gewinnen wir durch Koeffizientenvergleich $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ und $\alpha\beta = \frac{c}{a}$. Die Konstante $\frac{c}{a}$ ist somit das Produkt und der Koeffizient $\frac{b}{a}$ die negative Summe der Lösungen von Gleichung $(*)$. Die Terme $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ sind sogenannte *elementare symmetrische Funktionen*. Dazu in der nächsten Werkstatt mehr. Die folgenden Beispiele skizzieren Anwendungen des Satzes von VIETA, die im Unterricht nicht Standard sind.

Beispiel 1 a Welche quadratische Gleichung (mit ganzzahligen Koeffizienten) besitzt eine Lösung $t_1 = 2 + \sqrt{3}$?

Lösung: Aus der Lösungsformel für (normierte) quadratische Gleichungen folgt unmittelbar: Mit $t_1 = 2 + \sqrt{3}$ ist auch $t_2 = 2 - \sqrt{3}$ eine Lösung der gesuchten Gleichung (Man sagt: t_1 und t_2 sind zueinander konjugiert). Damit erhalten wir $p = -(t_1 + t_2) = -4$ und $q = t_1 t_2 = 4 - 3 = 1$. Die Gleichung lautet damit $t^2 - 4t + 1 = 0$.

Beispiel 1 b Gehört die Zahl $\sqrt{37} - \sqrt{20}$ zur Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 + 9x - 17 > 0$?

Lösung: Wegen $p = 9 > 0$ gehört zu $t_1 = \sqrt{37} - \sqrt{20}$ die zweite Lösung $t_2 = -\sqrt{37} - \sqrt{20}$. Die entsprechende quadratische Gleichung ist $t^2 + 2\sqrt{20}t - 17 = 0$, denn $(\sqrt{37} - \sqrt{20})(-\sqrt{37} - \sqrt{20}) = -37 + 20 = -17$. Nun ist $2\sqrt{20} = \sqrt{80} < \sqrt{81} = 9$, also ist $t_1^2 + 9t_1 - 17 > t_1^2 + 2\sqrt{20}t_1 - 17 = 0$, weil $t_1 > 0$. Damit gehört t_1 zur Lösungsmenge der Ungleichung.

Beispiel 2 Die Gleichung $x^2 - px + q = 0$ besitzt die Lösungen α und β. Welchen Wert nimmt der Term $\alpha^2 + \beta^2$ an?

Lösung: Methode I: Es gilt $\alpha^2 - \alpha p + q = 0$ und $\beta^2 - \beta p + q = 0$. Addition der Gleichungen führt auf $\alpha^2 + \beta^2 - p(\alpha + \beta) + 2q = 0$ bzw. $\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$.

Methode II: Wir nutzen die algebraische Identität $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$. Dies liefert unmittelbar (nach 1): $\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$.

Beispiel 3 Die quadratische Gleichung $x^2 + 5x + 7 = 0$ hat die reellen Lösungen α und β. Welche quadratische Gleichung besitzt die beiden Lösungen (a) $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{\beta}$ bzw. (b) $\frac{1}{\alpha^2}$ und $\frac{1}{\beta^2}$?

Lösung: (a) Wir haben $\alpha + \beta = -5$ und $\alpha\beta = 7$. Die gesuchte Gleichung gewinnen wir durch den folgenden Ansatz: $0 = (x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta}) = x^2 - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})x + \frac{1}{\alpha\beta} = x^2 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta} = x^2 - \frac{-5}{7}x + \frac{1}{7}$ bzw. $7x^2 + 5x + 1 = 0$.

(b) Auf ähnliche Weise erhält man $0 = (x - \frac{1}{\alpha^2})(x - \frac{1}{\beta^2}) = x^2 - \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}x + \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = x^2 - \frac{25-14}{49}x + \frac{1}{49}$ bzw. $49x^2 - 11x + 1 = 0$.

Die Berechnung eines Funktionswertes $f(x_0)$ gelingt manchmal rascher, wenn man sich ein Polynom verschafft, das an der Stelle x_0 verschwindet.

Beispiel 4 Bestimme den Wert des Polynoms $p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x$ an der Stelle $u = 2 + \sqrt{3}$.

Lösung: Aus Beispiel 1 a wissen wir, dass u eine Lösung der Gleichung $u^2 - 4u + 1 = 0$ ist d. h. es gilt $u^2 = 4u - 1$. Mit dieser Beziehung können wir nun die Potenzen u^3 und u^4 durch lineare Funktionen in u darstellen. Es ist nämlich $u^3 = u^2u = (4u-1)u = 4u^2 - u = 4(4u-1) - u = 15u - 4$ und $u^4 = u^3u = (15u-4)u = 15u^2 - 4u = 15(4u-1) - 4u = 56u - 15$. Dies ergibt nun $p(u) = u^4 - 5u^3 + 6u^2 - 5u = 56u - 15 - 5(15u - 4) + 6(4u - 1) - 5u = -1$.

Auf ähnliche Weise lässt sich der Funktionswert eines beliebigen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten an einer Stelle $u_0 = a + b\sqrt{d}$ stets auf die Form $ku + l$ $(a, b, d, k, l \in \mathbb{Z})$ bringen.

Beispiel 5 Zeige: Der Term $(7 + \sqrt{48}\,)^{13} + (7 - \sqrt{48}\,)^{13}$ ist eine durch 14 teilbare ganze Zahl.

Lösung: Die Zahlen $u = 7 + \sqrt{48}$ und $v = 7 - \sqrt{48}$ sind Lösungen der Gleichung $t^2 - 14t + 1 = 0$ (vgl. Beispiel 1 a). Mit $u^2 = 14u - 1$ und $v^2 = 14v - 1$ können wir nun die Terme an $a_n = u^n + v^n$ rekursiv wie folgt definieren ($a_0 = 1 + 1 = 2$, $a_1 = u + v = 14$):

$$\begin{aligned} a_n = u^n + v^n &= u^{n-2}(14u - 1) + v^{n-2}(14v - 1) \\ &= 14(u^{n-1} + v^{n-1}) - (u^{n-2} + v^{n-2}) = 14a_{n-1} - a_{n-2}. \end{aligned}$$

Da a_0, a_1 ganzzahlig sind und jedes a_i, $i \geq 2$, als Differenz ganzer Zahlen darstellbar ist, sind auch die Zahlen a_i ganz. Offenbar sind dann alle a_i, i ungerade, durch 14 teilbar. Denn ist a_{n-2} ein Vielfaches von 14, so auch $a_n = 14a_{n-1} + a_{n-2}$. (Wir verzichten hier auf einen strengen Nachweis durch vollständige Induktion).

Die beiden Formeln 1 lassen sich auf Polynome mit höherem Grad $n \geq 3$ übertragen. Ist nämlich $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ ein Polynom vom Grad n mit den Nullstellen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ (dabei sind auch mehrfache Nullstellen zugelassen), dann ist nach dem Faktorsatz $p(x)$ als Produkt darstellbar: $a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$. Die Koeffizienten lassen sich nun aus den Nullstellen folgendermaßen berechnen (wie man durch Ausmultiplizieren und geeignetes Zusammenfassen zeigen kann):

$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 + \cdots r_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}\,, \\
\sum_{i<j} r_i r_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n}\,, \\
&\vdots \\
\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_s} r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_s} &= (-1)^s \frac{a_{n-s}}{a_n}\,, \qquad \text{(diese Summe hat } \tbinom{n}{s} \text{ Summanden)} \\
&\vdots \\
r_1 r_2 \cdots r_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}\,.
\end{aligned}$$

Für $a_n = 1$ vereinfachen sich die rechten Seiten der Gleichungen entsprechend. Ist z. B. $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 + px^2 + qx + r$ ein normiertes kubisches Polynom, lassen sich die Koeffizienten p, q, r wie folgt darstellen:

$$p = -(r_1 + r_2 + r_3) \qquad q = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 \qquad r = -r_1 r_2 r_3 \tag{2}$$

Die nächsten Beispiele sollen den Einsatz von Hilfspolynomen noch mehr verdeutlichen.

Beispiel 6 Die reellen Zahlen x, y und z genügen den Bedingungen $x + y + z = a$ und $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$. Zeige: Mindestens eine der Zahlen x, y, z muss den Wert a annehmen.

Lösung: Wir fassen x, y, z als Nullstellen eines geeigneten kubischen Polynoms $p(t)$ auf. Nach 2 ist $p = -(x+y+z) = -a$ und $q = xy + xz + yz = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = -r\frac{1}{a}$. Damit hat das Polynoms $p(t)$ die Gestalt $p(t) = t^3 - at^2 - \frac{r}{a}t + r = (t - a)(t^2 - \frac{r}{a})$. Also ist a eine Nullstelle von $p(t)$. Daraus folgt die Behauptung.

Beispiel 7 Die Summe von drei ganzen Zahlen u, v, w ist Null. Zeige: Die Zahl $2u^4 + 2v^4 + 2w^4$ ist eine Quadratzahl.

Lösung: Das Polynom $p(t) = t^3 + pt^2 + qt + r$ habe die Nullstellen u, v, w. Nach 2 ist dann $p = -(u + v + w) = 0$. Somit gilt: $u^3 + qu + r = 0$, $v^3 + qv + r = 0$ und $w^3 + qw + r = 0$. Um den Term $2u^4 + 2v^4 + 2w^4$ zu erhalten, multiplizieren wir jede der drei Gleichungen entsprechend mit $2u$ ($2v$ bzw. $2w$) und addieren sie anschließend: $2u^4+2v^4+2w^4+2q(u^2+v^2+w^2)+2r(u+v+w)=0$. Nun ist aber $u^2+v^2+w^2=(u+v+w)^2-2(uv+uw+vw)=-2(uv+uw+vw)=-2q$. Damit wird $2u^4+2v^4+2w^4=-2q(-2q)=(2q)^2$. Der Term ist eine Quadratzahl.

Beispiel 8 Zerlege das Polynom $p(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ in ein Produkt zweier Polynome.

Lösung: Das Polynom $p(t)=t^3+pt^2+qt+r$ habe die Nullstellen x,y,z. Die zugehörigen Gleichungen lauten $x^3+px^2+qx+r=0$, $y^3+py^2+qy+r=0$ und $z^3+pz^2+qz+r=0$. Wegen $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=p^2-2q$ erhalten wir nach Addition dieser drei Gleichungen $x^3+y^3+z^3+p(p^2-2q)-qp+3r=0$. Daraus ergibt sich $x^3+y^3+z^3-3xyz=x^3+y^3+z^3+3r=-p(p^2-3q)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

Hilfspolynome sind – wie eingangs bereits angedeutet – überaus nützlich bei der Lösung komplexer Gleichungssysteme.

Beispiel 9 Die Summe aller Kantenlängen eines Quaders ist 96 cm, seine Gesamtoberfläche beträgt $286\,\text{cm}^2$ und sein Volumen ist $120\,\text{cm}^3$. Welche Abmessungen hat er?

Lösung: Lösung Sind x,y,z (in cm) die Längen der verschiedenen Kanten, dann führen die drei Bedingungen auf das folgende Gleichungssystem

$$(i)\ 4(x+y+z)=96 \qquad (ii)\ 2(xy+yz+xz)=286 \qquad (iii)\ xyz=120.$$

Die Zahlen x,y,z sind die Nullstellen des Polynoms $p(t)=t^3-24t^2+143t-120$. Schnell sieht man, dass $t_1=x=1$ eine Lösung der Gleichung $p(t)=0$ ist. Durch Polynomdivision erhalten wir $p(t)=(t^2-23t+120)(t-1)$ mit den beiden übrigen Nullstellen $t_2=y=8$ und $t_3=z=15$.

Beispiel 10 Löse das Gleichungssystem

$$(i)\ x+y+z=2 \qquad (ii)\ x^2+y^2+z^2=14 \qquad (iii)\ x^3+y^3+z^3=20.$$

Lösung: Wir setzen erneut an: $p(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3+pt^2+qt+r$, mit den Nullstellen x,y,z. Nach 2 gilt

$$\begin{aligned} & p=-(x+y+z)=-2 \\ \text{und}\quad & q=xy+xz+yz=\tfrac{1}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right)=-5\,. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von r müssen die einzelnen Gleichungen des Systems geschickt multipliziert und addiert werden:

$$q \cdot (x+y+z) + p \cdot (x^2+y^2+z^2) + x^3+y^3+z^3 = 2q + 14p + 20\,.$$

Durch passende Umstellungen erhalten wir daraus $(x^3+px^2+qx+r)+(y^3+py^2+qy+r)+(z^3+pz^2+qz+r)-3r = 2q+14p+20$. Die letzte Gleichung vereinfacht sich nun wegen $p(x)=p(y)=p(z)=0$ zu $-3r = 2q+14p+20 = -10-28+20 = -18$. Also ist $r=6$ und das zugehörige Polynom p lautet: $p(t) = t^3-2t^2-5t+6$. Ähnlich wie im vorhergehenden Beispiel findet man die Lösungen $t_1 = x = 1$, $t_2 = y = -2$ und $t_3 = z = 3$.

Beispiel 11 Welche Lösungen besitzt das Gleichungssystem

$$(i)\ xyz = 1 \qquad (ii)\ x+y+z = xy+xz+yz \qquad (iii)\ x^3+y^3+z^3 = \tfrac{73}{8}\ ?$$

Lösung: Setze $a := x+y+z$. Die drei Gleichungen legen das Hilfspolynom $p(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3-at^2+at-1$ nahe. Offensichtlich ist $t=1$ eine Nullstelle von $p(t)$. Polynomdivision ergibt $p(t) = (t-1)[t^2+(1-a)t+1]$, eine Variable muss daher den Wert 1 haben. Es ist z. B. $x=1$. Aus (i) folgt $yz=1$; eingesetzt in (iii) liefert dies eine biquadratische Gleichung $(y^3)^2 - \frac{65}{8}y^3 + 1$ mit den Lösungen $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 2$ und damit auch $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$. Durch Permutation dieser Zahlen bekommen wir die Lösungsmenge $\{(1;\frac{1}{2};2),(1;2;\frac{1}{2}),(\frac{1}{2};2;1),(\frac{1}{2};1;2),(2;1;\frac{1}{2}),(2;\frac{1}{2};1)\}$.

Die Schlussweise aus dem Nachweis des folgenden Problems erweist sich gelegentlich hilfreich zur Bestätigung von Gleichheiten.

Beispiel 12 Die reellen Zahlen u,v,w und x,y,z genügen den Bedingungen $(i)\ x+y+z = u+v+w \quad (ii)\ xyz = uvw, \quad (iii)\ 0 < u \le x \le y \le z \le w, u \le v \le w$. Zeige: $u=x$, $v=y$, $w=z$.

Lösung: Wir betrachten hierzu die Polynome

$$\begin{aligned} & p(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3+pt^2+qt+r \\ \text{und}\quad & q(t) = (t-u)(t-v)(t-w) = t^3+pt^2+kt+r \end{aligned}$$

(da die Konstanten und die Koeffizienten von t^2 nach Voraussetzung jeweils übereinstimmen sollen). Setze $r(t) = p(t)-q(t) = (q-k)t$. Wegen $q(u)=0$ und Gleichung (iii) ist $r(u) = p(u) = (u-x)(u-y)(u-z) \le 0$. Andererseits ist

$r(u) = (q-k)u$, was $q-k \leq 0$ liefert. Entsprechend ist $r(w) = p(w) = (w-x)(w-y)(w-z) \geq 0$ (nach (iii)) und daraus folgt $q-k \geq 0$, also muss $q = k$ gelten. Damit sind die Polynome $p(t)$, $q(t)$ identisch und haben insbesondere dieselben Nullstellen. Die Behauptung ergibt sich nun aus Ungleichung (iii).

Beispiel 13 Das Produkt von zwei der vier Nullstellen der Gleichung $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ ist -32. Bestimme k. (USAMO 1984, Finalrunde)

Lösung: Die Nullstellen seien a, b, c, d. In Analogie zu 2 gelten die vier Beziehungen:

$$\begin{array}{ll} (i) & a+b+c+d = 18\,, \\ (ii) & ab+ac+ad+bc+bd+cd = k\,, \\ (iii) & abc+abd+acd+bcd = -200\,, \\ (iv) & abcd = -1984\,. \end{array}$$

O. B. d. A. seien a, b die Nullstellen mit dem Produkt -32. Wegen $abcd = -1984$ muss $cd = 62$ sein. Damit erhalten wir die folgenden vereinfachten Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} (v) & a+b+c+d = 18\,, \\ (vi) & ac+ad+bc+bd+30 = k\,, \\ (vii) & -32c-32d+62a+62b = -200\,. \end{array}$$

Wir überlegen: Gesucht ist der Wert k, nicht die Werte von a, b, c, d. Dazu müssten wir aber den Wert der Summe $ac + ad + bc + bd = (a+b)(c+d)$ kennen. Auch die linke Seite von (vii) lässt sich teilweise faktorisieren. Wir erhalten: $-32(c+d) + 62(a+b) = -200$. Wenn wir also die Summenwerte $a+b$ und $c+d$ wüssten, wären wir fertig. Wir setzen zur Vereinfachung $u := a+b$ und $v := c+d$. Damit bekommen wir das einfachere Gleichungssystem $u+v = 18$ und $62u - 32v = -200$, dessen Lösung $u = 4$, $v = 14$ ist. Daraus lässt sich nun k berechnen: $k = 4 \cdot 14 + 30 = 86$.

Beispiel 14 Man Zeige: Alle nicht negativen reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$ erfüllen die Doppelungleichung $0 \leq xy + yz + xz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$. (15. IMO 1984, Prag)

Lösung: Die Gültigkeit der ersten Ungleichung ist schnell gezeigt:

$$xy + yz + xz - 2xyz = xy(1 - z) + yz(1 - x) + xz \geq 0.$$

Zum Nachweis der zweiten Ungleichung betrachten wir wiederum ein Hilfspolynom p, nämlich $p(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - t^2 + qt + r$, denn $p = -(x + y + z) = -1$ und $q = xy + yz + xz$ und $r = -xyz$. Die Ungleichung lässt sich jetzt kürzer schreiben: $q + 2r \leq \frac{7}{27}$. Da höchstens eine der Zahlen x, y, z größer $\frac{1}{2}$ sein kann, markiert $t = \frac{1}{2}$ gewissermaßen eine „Grenze“. Es ist $p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}q + r = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(q + 2r)$.

Damit ist die Behauptung $q+2r \leq \frac{7}{27}$ äquivalent zu $p(\frac{1}{2}) \leq -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{27} = \frac{1}{216}$. Wegen der Ungleichung $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}(a+b+c)$ zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel gilt nun für $x, y, z \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \\ &\leq \left(\frac{(\frac{1}{2} - x) + (\frac{1}{2} - y) + (\frac{1}{2} - z)}{3}\right)^3 = \left(\frac{\frac{3}{2} - 1}{3}\right)^3 = \frac{1}{216}\,. \end{aligned}$$

Wäre dagegen eine der Zahlen x, y, z größer $\frac{1}{2}$, dann würde $p(\frac{1}{2}) < 0$ sein.

Polynome sind ein Lieblingsspielzeug von Aufgabenmachern überall auf der Welt. Die beiden ersten Fragen in der heutigen L(o)eserrunde kommen gar aus Australien, passend zum Thema „ein Hilfspolynom finden“. Und weil wir gerade dabei sind, gibt es als Dreingabe drei weitere Aufgaben Marke „Australian Open“. Soll heißen: Die fünf Probleme sind offen für alle.

Aufgabe 21 Gegeben ist ein kubisches Polynom $p(x)$ mit den Nullstellen x_1, x_2, x_3, das folgender Bedingung genügt: $p(\frac{1}{2}) + p(-\frac{1}{2}) = 1000p(0)$. Welchen Wert nimmt dann der Term $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1}$ an? (Australian Mathematical Olympiad 1996)

Aufgabe 22 Die quadratische Gleichung $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$, $p \in \mathbb{R}$, hat die Nullstellen a, b. Zeige: $a^4 + b^4 \geq 2 + \sqrt{2}$. (1992 Telecom Junior Contest)

Aufgabe 23 Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $(x + 1998)(x + 1999)(x + 2000)(x + 2001) + 1 = 0$. (Australian Mathematical Olympiad, 1998)

Aufgabe 24 Es ist zu zeigen, dass die Gleichung $x^4 + 131 = 3y^4$ keine ganzzahligen Lösungen x, y haben kann. (Australian Mathematical Olympiad, 1984)

Aufgabe 25 Gesucht sind alle Funktionen $f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$, $W_f \subseteq \mathbb{R}$, welche der Funktionalgleichung $f(u + v)f(u - v) = 2u + f(u^2 - v^2)$ genügen. Dabei sind $u, v \in \mathbb{R}$. (Australian Intermediate Contest, 1996)

Die elegantesten Lösungen sollen wieder an dieser Stelle veröffentlicht werden. Hierzu sind Lösungsvorschläge an folgende Adresse erbeten:

Paul Jainta, Werkvolkstrasse 10, 91126 Schwabach

oder als e-mail an paul.jainta@fuemo.de bzw. p.jainta@odn.de.

Für weitere Anregungen, Hinweise oder Anmerkungen bin ich sehr dankbar.

Paul Jainta, Schwabach