$^{\text{Die}}\sqrt{\text{WURZEL}}$ – Werkstatt Mathematik

Polynome – Teil V: Elementarsymmetrische Funktionen.

Es gibt Gleichungssysteme, die lassen sich mit schulischen Mitteln nicht bzw. nur sehr mühsam knacken. So musste etwa in der 2. Runde (= Gebietswettbewerb) der 6. Österreichischen Mathematischen Olympiade (ÖMO) 1978 das folgende System in reellen Zahlen gelöst werden:

$$3x + y + z = 1 \tag{1}$$

$$(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 = 68 \tag{2}$$

$$x \cdot (y-z)^2 + y \cdot (z-x)^2 + z \cdot (x-y)^2 = 16 \tag{3}$$

Wer hierbei brav das Einsetzungsverfahren anwenden wollte, dürfte wohl rasch vor dem notwendigen Rechenaufwand kapituliert haben. Ein kleiner Trick hätte dabei jedoch die Zahl der Rechenschritte überschaubar halten und am Ende sicher zur Auflösung des Systems führen können. Wir müssen nur das Ergebnis des Wurzelsatzes von Vieta (aus Teil IV) uminterpretieren. Dies führt uns daher zum Begriff der *symmetrischen Funktion*. Fassen wir die linken Seiten der Gleichungen (1)–(3) als (unterschiedliche) Polynome in den Variablen x, y, z auf, so ist das gegebene System symmetrisch, da es bei jeder Permutation (= Vertauschung) der Variablen unverändert bleibt. Die entsprechenden Polynome heißen ebenfalls symmetrisch. Wir verallgemeinern:

Definition 1 Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heißt *symmetrisch*, wenn sie unter allen Vertauschungen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ invariant d. h. unverändert bleibt.

Man überprüft eine Funktion auf Symmetrie, indem man nachweist:

$$\text{Für alle } k \in \{1, \ldots, n-1\} \text{ gilt: } f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, \boldsymbol{x_{k+1}}, \boldsymbol{x_k}, x_{k+2}, \ldots, x_n)\,.$$

Beispiel 1

a) Die Funktionen $f(x, y) = \cos(x+y)$, $g(x, y, z) = 1+3xyz+x^2+y^2+z^2$ oder $h(x, y, z) = (z-x)^2 \cdot (z-y)^2 \cdot (y-x)^2$ sind symmetrisch.

b) Nicht symmetrisch dagegen sind $f(x, y) = \sin(y-x)$, da $\sin(x-y) = \sin[-(y-x)] = -\sin(y-x) \neq \sin(y-x)$ oder ebenso das Polynom $g(x, y) = x^2+2xy+5y^2$. Vertauscht man darin x und y ergibt sich das von g verschiedene Polynom $g(y, x) = y^2+2yx+5x^2$. Auch $k(x, y, z) = (x-y)\cdot(x-z)\cdot(y-z)$ ist nicht symmetrisch, da $k(x, y, z) = -k(y, x, z)$.

Die beiden einfachsten symmetrischen Polynome in zwei Variablen sind $\boldsymbol{s_1(x, y) = x + y}$ und $\boldsymbol{s_2(x, y) = x \cdot y}$. Mit diesen Funktionen lassen sich alle symmetrischen Polynome in zwei Variablen darstellen. Es gilt nämlich allgemein: *Ersetzt man in einem Polynom $f(y_1, y_2)$ die Variablen y_1, y_2 durch $y_1 = s_1(x_1, x_2)$ bzw. $y_2 = s_2(x_1, x_2)$, so erhält man das Polynom $f(x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2)$, das symmetrisch in x_1, x_2 ist.*

Definition 2 Die Polynome $s_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ und $s_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ heißen *elementarsymmetrische Funktionen in zwei Variablen.*

Beispiel 2 Drücke das Polynom $f(x, y)$ durch s_1 und s_2 aus:

$$\text{a)} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad\qquad \text{b)} \quad f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3\,.$$

Zu a): Es ist $f(x, y) = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s_1^2 - 2s_2$.
Zu b): Es ist $f(x, y) = (x + y)^3 - x^2y - xy^2 = (x + y)^3 - xy(x + y) = s_1^3 - s_2s_1$.

Um eine allgemeine Methode zur Darstellung symmetrischer Polynome (in zwei Variablen) mit Hilfe der elementarsymmetrischen Funktionen s_1, s_2 angeben zu können, benötigen wir noch einen weiteren Begriff. Die Potenzterme $a_{ii}x^iy^i$ eines Polynoms $f(x, y)$ gehen problemlos über in $a_{ii}s_2^i$. Die restlichen Glieder fassen wir zu Paaren $a_{ij}x^iy^j + a_{ji}x^jy^i$ zusammen (wobei $i > j$). Wegen der Symmetrie von $f(x, y)$ muss $a_{ij} = a_{ji}$ gelten, wir können also $a_{ij}(xy)^j = a_{ij}s_2^j$ ausklammern. Es bleiben also noch die so genannten Potenzsummen $p_{i-j} = x^{i-j} + y^{i-j}$. Doch auch diese Summen sind durch s_1 und s_2 darstellbar.

Definition 3 Die symmetrische Funktion in zwei Variablen $p_k(x,y) = x^k + y^k$, $k \in \mathbb{N}$, heißt k*-te Potenzsumme.*

Mithilfe des binomischen Lehrsatzes

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

sind im Folgenden die ersten fünf Potenzsummen $p_k = x^k + y^k$ durch s_1 und s_2 ausgedrückt und aufgelistet:

$$\begin{aligned}
p_1 &= x + y = s_1 \\
p_2 &= x^2 + y^2 = s_1^2 - 2s_2 \qquad \text{(siehe Beispiel 2 a)} \\
p_3 &= x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = s_1^3 - 3s_1s_2 \\
p_4 &= x^4 + y^4 = (x+y)^4 - 4xy(x^2+y^2) - 6x^2y^2 = s_1^4 - 4s_2 \cdot p_2 - 6s_2^2 \\
&= s_1^4 - 4s_2(s_1^2 - 2s_2) - 6s_2^2 = s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 2s_2^2 \\
p_5 &= x^5 + y^5 = (x+y)^5 - 5xy(x^3+y^3) - 10x^2y^2(x+y) \\
&= s_1^5 - 5s_2p_3 - 10s_2^2s_1 = \ldots = s_1^5 - 5s_1^3s_2 + 5s_1s_2^2\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Prinzipiell lassen sich alle Potenzsummen p_k durch die folgende Rekursionsformel bestimmen ($k \geq 2$):

$$\begin{aligned}
p_k &= x^k + y^k \\
&= (x+y)(x^{k-1} + y^{k-1}) - xy(x^{k-2} + y^{k-2}) \\
&= s_1 \cdot p_{k-1} - s_2 \cdot p_{k-2}\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Beispiel 3 Drücke das Polynom $f(x,y)$ durch s_1 und s_2 aus.

a) $f(x,y) = x^5y + x^4y^2 + x^2y^4 + xy^5 + x^2y + xy^2$. Wir zerlegen dazu f paarweise in Summen der Art $x_iy_j + x_jy_i$, faktorisieren passend und ersetzen die Potenzsummen entsprechend. Es ist

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x^5y + xy^5) + (x^4y^2 + x^2y^4) + (x^2y + xy^2) \\ &= xy(x^4 + y^4) + (xy)^2(x^2 + y^2) + xy(x + y) \\ &= s_2p_4 + s_2^2p_2 + s_2s_1 \\ &= s_2 \cdot (s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 2s_2^2) + s_2^2 \cdot (s_1^2 - 2s_2) + s_1s_2 \\ &= s_1^4s_2 - 3s_1^2s_2^2 + s_1s_2\,. \end{aligned}$$

b) $f(x,y) = (x-y)^{2002}$. Es ist

$$\begin{aligned} f(x,y) &= [(x-y)^2]^{1001} = [x^2 + y^2 - 2xy]^{1001} = [(x+y)^2 - 4xy]^{1001} \\ &= (s_1^2 - 4s_2)^{1001}\,. \end{aligned}$$

c) $f(x,y) = (x+4y)(2x+3y)(3x+2y)(4x+y)$. Nach geeigneter Umstellung ist

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+4y)(4x+y)(2x+3y)(3x+2y) = [4(x^2+y^2) + 17xy][6(x^2+y^2) + 13xy] \\ &= [4(s_1^2 - 2s_2) + 17s_2][6(s_1^2 - 2s_2) + 13s_2] = (4s_1^2 + 9s_2)(6s_1^2 + s_2)\,. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Funktionen $s_1(x,y)$ und $s_2(x,y)$ mit dem Satz von Vieta (für Polynome zweiten Grades) ergibt die folgende bemerkenswerte Übereinstimmung: Sind x_1 und x_2 die Nullstellen eines Polynoms $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, dann kann man den Wert eines beliebigen symmetrischen Polynoms an den Nullstellen von f durch die Koeffizienten von f ausdrücken.

Beispiel 4 Berechne den Wert von $a = x^5 + y^5$, wenn x, y die Nullstellen von $f(x) = x^2 + x - 19$ sind.
Nach Vieta ist $x + y = -1 = s_1$ und $x \cdot y = -19 = s_2$. Daher ist (wegen 4)

$$\begin{aligned} a = p_5 &= s_1^5 - 5s_1^3 s_2 + 5s_1 s_2^2 \\ &= (-1)^5 - 5 \cdot (-1)^3 \cdot (-19) + 5 \cdot (-1) \cdot (-19)^2 = -1901\,. \end{aligned}$$

Beispiel 5 Welche reellen Lösungen hat die Gleichung $\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$?
Mit $y = \sqrt[4]{x}$ und $z = \sqrt[4]{97 - x}$ vereinfacht sich die Gleichung zu $y^4 + z^4 = x + 97 - x = 97$. Damit erhalten wir das Gleichungssystem: $y + z = 5$ und $y^4 + z^4 = 97$. Mit $s_1 = y + z$ und $s_2 = yz$ wird daraus: $s_1 = 5$ und $s_1^4 - 4s_1^2 s_2 + 2s_2^2 = 97$. $s_1 = 5$ eingesetzt, liefert die quadratische Gleichung $s_2^2 - 50s_2 + 264 = 0$ mit den Lösungen $s_2 = 6$ bzw. $s_2 = 44$. Dies führt auf die beiden Systeme

$$\begin{array}{lllll} \text{(I)} & y + z = 5 & \text{und} & yz = 6 & \text{bzw.} \\ \text{(II)} & y + z = 5 & \text{und} & yz = 44\,. & \end{array}$$

Das System (I) wird durch die Paare $(y_1, z_1) = (2, 3)$ und $(y_2, z_2) = (3, 2)$ erfüllt, das System (II) hat nur komplexe Lösungen und entfällt daher. Wie man leicht nachrechnen kann, liefert das erste System die reellen Lösungen $x_1 = 16$, $x_2 = 81$.

Beispiel 6 Die Nullstellen x_1, x_2 der Quadratfunktion $f(x) = x^2 + x + c$ genügen der Bedingung:

$$\frac{2x_1^3}{2 + x_2} + \frac{2x_2^3}{2 + x_1} = -1\,.$$

Bestimme c.
Wir schreiben die Bestimmungsgleichung bruchtermfrei:

$$\begin{aligned} 2x_1^3(2 + x_1) + 2x_2^3(2 + x_2) + (2 + x_1)(2 + x_2) &= 0 \qquad \text{bzw.} \\ 4(x_1^3 + x_2^3) + 2(x_1^4 + x_2^4) + 4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Mit den Potenzsummenformeln bzw. mit $s_2 = x_1 \cdot x_2$ folgt nun

$$4s_1^3 - 12s_1s_2 + 2s_1^4 - 8s_1^2s_2 + 4s_2^2 + 4 + 2s_1 + s_2 = 0\,. \tag{6}$$

Wegen $s_1 = x_1 + x_2 = -1$, $s_2 = x_1 \cdot x_2 = c$ (Vieta) erhalten wir durch Einsetzen in 6 eine quadratische Gleichung für c: $4c^2 + 5c = 0$. Die Lösungen dieser Gleichung sind $c_1 = 0$ und $c_2 = -\frac{4}{5}$.

Beispiel 7 Die Zahlen x_1, x_2 sind die Lösungen von $x^2 - 6x + 1 = 0$. Zeige: Der Term $x_1^n + x_2^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ ganzzahlig und nicht durch 5 teilbar.

Wegen $s_1 = x_1 + x_2 = 6$ und $s_2 = x_1x_2 = 1$ sind p_1 und $p_2 = x_1^2 + x_2^2 = s_1^2 - 2s_2 = 36 - 2 = 34$ ganzzahlig und nicht durch 5 teilbar. Die Rekursion 5 lautet hier: $p_k = 6 \cdot p_{k-1} - p_{k-2}$. Aus der Ganzzahligkeit von p_1 und p_2 folgt auch die Ganzzahligkeit von p_k $(k \geq 2)$. Wegen $s_1 = s_2 \equiv 1 \pmod 5$ ist $p_k \equiv p_{k-1} - p_{k-2} \pmod 5$. Als Folge der Reste p_k modulo 5 ergeben sich nun $p_0 \equiv 2$, $p_1 \equiv 1$, $p_2 \equiv 4$, $p_3 \equiv 3$, $p_4 \equiv 4$, $p_5 \equiv 1$, $p_6 \equiv 2$, $p_7 \equiv 1, \ldots$
Nach sechs Schritten wiederholt sich das Paar $(2, 1)$, die Folge ist periodisch ohne Null.

Übung 1 Das quadratische Polynom $f(x) = x^2 + px + q$ hat die Nullstellen x_1, x_2. Welche Quadratfunktion besitzt als Nullstellen die Terme

$$\text{a)} \quad x_1^3 \quad \text{und} \quad x_2^3 \qquad \text{b)} \quad x_1^2 + x_2 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2^2\,?$$

Übung 2 Die Lösungen x_1, x_2 der Gleichung $x^2 + bx - 1 = 0$ genügen der Bedingung:

$$\frac{x_1^3}{x_2^2 - 3} + \frac{x_2^3}{x_1^2 - 3} = 0\,.$$

Bestimme b.

Beispiel 8 Löse das folgende Gleichungssystem: $x^5 + y^5 = 31$ und $x + y = 1$.

Man kann das Problem auch so formulieren: Welche Quadratfunktion hat Lösungen x, y die das System lösen? Setze $f(x) = x^2 + px + q$. Nach Vieta ist $s_1 = -p$ und $s_2 = q$. Mit der Potenzsummenformel für p_5 folgt damit: $31 = x^5 + y^5 = s_1^5 - 5s_1^3 s_2 + 5s_1 s_2^2 = -p^5 + 5p_3 q - 5pq^2$. Da aber $p = -s_1 = -(x + y) = -1$ ist, ergibt sich eine quadratische Gleichung in q: $5q^2 - 5q - 30 = 0$. Sie hat die Lösungen $q_1 = 3$, $q_2 = -2$. Die beiden Polynome sind $f_1(x) = x^2 - x + 3$ bzw. $f_2(x) = x^2 - x - 2$, deren Nullstellen $s_1 = \frac{1-i\sqrt{11}}{2}$ und $s_2 = \frac{1+i\sqrt{11}}{2}$ bzw. $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ sind die Lösungen des Gleichungssystems (Hierbei sind die ersten beiden Lösungen aber komplex).

Übung 3 Welches quadratische Polynom mit Nullstellen x, y „löst“ das Gleichungssystem?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & x^2 + xy + y^2 = 49 & x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931 \\ \text{b)} & x^2 + y^2 = 7 + xy & x^3 + y^3 = 6xy - 1\,. \end{array}$$

Mit dem Begriff „elementarsymmetrische Funktion“ lässt sich der Satz von Vieta (vgl. Heft 5/01, S. 106) auf beliebig viele Variable erweitern und auch kürzer formulieren.

Wurzelsatz von Vieta Sind $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, so gelten für die Koeffizienten a_k die Beziehungen: $a_k = (-1)^k \cdot s_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = 1, \ldots, n$. Dabei sind die s_k die elementarsymmetrischen Funktionen in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Es gilt:

$$s_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}\,.$$

Es ist also:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n \\ &\vdots \\ a_n &= (-1)^n \cdot x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \,. \end{aligned}$$

Zum Beispiel sind die drei einfachsten elementarsymmetrischen Funktionen in drei Variablen:

$$s_1(x,y,z) = x + y + z \quad s_2(x,y,z) = xy + xz + yz \quad s_3(x,y,z) = xyz \tag{7}$$

Für spätere Zwecke geben wir die ersten vier Potenzsummen ebenfalls tabellarisch an. Sie lassen sich wie oben entsprechend herleiten:

$$\begin{aligned} p_2 &= x^2 + y^2 + z^2 = s_1^2 - 2s_2 \\ p_3 &= x^3 + y^3 + z^3 = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3 \\ p_4 &= x^4 + y^4 + z^4 = s_1^4 - 4s_1^2 s_2 + 2s_2^2 + 4s_1 s_3 \\ p_5 &= x^5 + y^5 + z^5 = s_1^5 - 5s_1^3 s_2 + 5s_1 s_2^2 + 5s_1^2 s_3 - 5s_2 s_3 \end{aligned} \tag{8}$$

Übung 4 Zeige:

a) $p_6 = s_1^6 - 6s_1^4 s_2 + 9s_1^2 s_2^2 - 2s_2^3 + 6s_1^3 s_3 - 12s_1 s_2 s_3 + 3s_3^2$

b) $x^4y^2 + x^2y^4 + x^4z^2 + x^2z^4 + y^4z^2 + y^2z^4 = s_1^2 s_2^2 - 2s_2^3 - 2s_1^3 s_3 + 4s_1 s_2 s_3 - 3s_3^2$.

Beispiel 9 Für welchen Wert $a \in \mathbb{R}$ sind die Nullstellen x_1, x_2, x_3 des Polynoms $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + a$ zugleich auch Lösungen der Gleichung $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 = 0$?

Es ist $s_1 = 6$, $s_2 = a$ und $s_3 = -a$ (nach 7) und daher $p_1 = 6$, $p_2 = s_1^2 - 2s_2 = 36 - 2a$, $p_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 = 216 - 21a$. Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 = p_3 - 3p_2 \cdot 3 + 3p_1 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3^3 \\ &= 216 - 21a - 9(36 - 2a) + 27 \cdot 6 - 81 = -27 - 3a \end{aligned}$$

und daraus schließlich $a = -9$.

Beispiel 10 Man zeige: Die Zahl $a = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ ist eine Nullstelle von $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{6} \cdot x^2 - 1$.

Wir setzen hierzu $a_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, $a_2 = \sqrt[3]{-\frac{2}{9}}$ und $a_3 = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$. Dann gilt

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \qquad a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot \frac{4}{9}} = -\frac{2}{9} \qquad \text{und}$$

$$\begin{aligned} a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 &= \sqrt[3]{-\frac{2}{81}} + \sqrt[3]{\frac{4}{81}} + \sqrt[3]{-\frac{8}{81}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{2}{9}} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \right) = \sqrt[3]{-\frac{2}{9}} \cdot a\,. \end{aligned}$$

Wegen $p_3 = (a_1 + a_2 + a_3)^3 - 3(a_1 + a_2 + a_3)(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) + 3a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ folgt $\frac{1}{3} = a^3 - 3a \cdot \sqrt[3]{-\frac{2}{9}} \cdot a - \frac{2}{3}$ bzw. $0 = a_3 + \sqrt[3]{6} \cdot a_2 - 1$, d. h. die Zahl $a = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ ist Nullstelle von f.

Übung 5

a) Die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$ seien x_1, x_2, x_3. Welches Polynom dritten Grades hat die Nullstellen x_1^2, x_2^2 und x_3^2?

b) Zeige: Für $a + b + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, ist $a^4 + b^4 + c^4 = 2 \cdot (ab + ac + bc)^2$.

c) Man bestimme ein kubisches Polynom $f(x)$ mit den Nullstellen $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $x_2 + x_3$, wenn x_1, x_2, x_3 die Nullstellen eines Polynoms $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ sind.

Mithilfe von elementarsymmetrischen Funktionen lassen sich symmetrische Polynome in (symmetrische) Faktoren aufspalten.

Beispiel 11 Man zerlege das Polynom $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3 \cdot xyz$ in ein Produkt von symmetrischen Polynomen.

Nach 8 ist $f(x, y, z) = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 - 3s_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 = s_1(s_1^2 - 3s_2)$. Daher lässt sich f darstellen als

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + y + z) \cdot \left[(x + y + z)^2 - 3(xy + xz + yz)\right] \\ &= (x + y + z) \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz\right). \end{aligned}$$

Übung 6 Zerlege ebenso

a) $(x + y)(x + z)(y + z) + xyz$ und

b) $(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz)^2 - (x + y + z)^2(x^2 + y^2 + z^2)$.

Die Methode der symmetrischen Polynome ist besonders praktisch für die Lösung von Gleichungssystemen, zumal wenn z. B. die linken Seiten der Gleichungen nur symmetrische Polynome sind. Wir können nämlich durch Umschreiben des Systems als neue Variable elementarsymmetrische Funktionen einführen. Der Vorteil liegt auf der Hand: Das so erhaltene System hat gewöhnlich einen niedrigeren Grad.

Beispiel 12 Löse das Gleichungssystem ($x, y, z \in \mathbb{R}$)

$$(1) \quad x + y + z = 1 \qquad (2) \quad x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1\,.$$

Das System hat keine Lösung. Um das einzusehen, führen wir elementarsymmetrische Funktionen ein und erhalten $s_1 = 1$, $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3 + s_3 = s_1^4 - 4s_1^2 s_2 + 2s_2^2 + 4s_1 s_3 + 1$. Für $s_1 = 1$ vereinfacht sich diese Gleichung zu $2s_2^2 - s_2 + 1 = 0$. Die quadratische Gleichung hat keine Lösung, da die Diskriminante $D = 1 - 8$ negativ ist.

Zum Schluss soll noch die Eingangsaufgabe aus der 6. ÖMO 1978 besprochen werden. Gesucht sind also die Lösungen des Systems

$$\begin{aligned}
&(1) & x + y + z &= 1 \\
&(2) & (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 &= 68 \\
&(3) & x \cdot (y - z)^2 2 + y \cdot (z - x)^2 + z \cdot (x - y)^2 &= 16\,.
\end{aligned}$$

Wir drücken die drei Gleichungen wieder durch elementarsymmetrische Funktionen aus und erhalten:

(I) $s_1 = 1$.

(II) $(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = 2(x + y + z)^2 - 6(xy + xz + yz) = 68$

und schließlich $s_1^2 - 3s_2 = 34$.

(III)
$$\begin{aligned}
&x \cdot (y - z)^2 + y \cdot (z - x)^2 + z \cdot (x - y)^2 \\
&\quad = xy^2 - 2xyz + xz^2 + yz^2 - 2xyz + x^2 y + x^2 z - 2xyz + y^2 z \\
&\quad = x(xy + xz + yz) + y(xy + xz + yz) + z(xy + xz + yz) - 9xyz \\
&\quad = (x + y + z)(xy + xz + yz) - 9xyz = 16
\end{aligned}$$

und damit $s_1 s_2 - 9s_3 = 16$.

Wir bekommen also das viel einfachere Gleichungssystem

$$\text{(I)}\quad s_1 = 1 \qquad \text{(II)}\quad s_1^2 - 3s_2 = 34 \qquad \text{(III)}\quad s_1 s_2 - 9s_3 = 16$$

mit den Lösungen $s_1 = 1$, $s_2 = -11$ und $s_3 = -3$. Sind x, y, z Lösungen der Gleichung $(a-x)(a-y)(a-z) = 0$, so sind sie auch Lösungen der Gleichung $a^3 - s_1 a^2 + s_2 a - s_3 = 0$ d. h. von $a^3 - a^2 - 11a + 3 = 0$. Eine Lösung der letzten Gleichung ist (durch Probieren) $a_1 = -3$ und nach Division durch $(a+3)$ ergibt sich die quadratische Gleichung $a^2 - 4a + 1 = 0$; ihre Lösungen sind $a_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$. Da das Gleichungssystem symmetrisch ist, erhält man alle Lösungstripel durch systematisches Vertauschen der Werte a_1, a_2, a_3:

$$\begin{aligned} L = \{&(-3, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}); (-3, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}); (2+\sqrt{3}, -3, 2-\sqrt{3}); \\ &(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, -3); (2-\sqrt{3}, -3, 2+\sqrt{3}); (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}, -3)\}\,. \end{aligned}$$

Wir haben oben gezeigt, dass sich auch Potenzsummen (mit zwei oder drei Variablen) durch elementarsymmetrische Funktionen darstellen lassen. Dies ist sogar für beliebig viele Variablen möglich (Newton-Relationen). Dazu mehr in der nächsten „Werkstatt“. Als Dreingabe gibt es weitere Anwendungen zur Methode der elementarsymmetrischen Funktionen (u. a. zur Lösung komplexer Gleichungssysteme). Aufgabe 26 hat wieder etwas mit dem heutigen Thema zu tun. Der Rest ist Spielmaterial aus Bulgarien. Denn wie sagte doch schon der französische Mathematiker Jean-Baptiste le Rond d’Alembert (1717-1783): *„Die Mathematik ist wie ein Spielzeug, welches uns die Natur zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis“*.

Aufgabe 26 Man zeige: Sind a, b zwei verschiedene Lösungen der Gleichung $x^4 + x^3 = 1$, dann ist ihr Produkt $a \cdot b$ eine Lösung von $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$.

Aufgabe 27 Untersuche, ob die Hunderterziffer des Terms

$$2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$$

gerade oder ungerade ist.

Aufgabe 28 Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. M und N sind zwei Punkte auf den Seiten BC bzw. CD, so dass für den Umfang u des Dreiecks CMN gilt: $u = a + b$. Zusätzlich ist NA Winkelhalbierende von $\sphericalangle DNM$.

a) Welche Beziehung besteht zwischen a und b?

b) Welche Weite hat der Winkel MAN ?

Aufgabe 29 Acht Kinder teilen sich 719 Nüsse. Jedes Kind hat verschieden viele Nüsse. Von je zwei Kindern ist die Anzahl der Nüsse des einen Kindes ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl der Nüsse des anderen. Wie viele Nüsse hat jedes Kind ?

Aufgabe 30 Für welche reellen Werte a ist die Ungleichung

$$a^{\cos 2x} + a^{2\sin^2 x} \leq 2$$

allgemein gültig?

Schicken Sie mir Ihre Spielergebnisse. Die elegantesten Spielausgänge sollen wieder an dieser Stelle veröffentlicht werden. Hierzu sind Lösungsvorschläge an folgende Adresse erbeten:

Paul Jainta, Werkvolkstrasse 10, 91126 Schwabach

oder als e-mail an paul.jainta@fuemo.de bzw. p.jainta@odn.de.

Für weitere Anregungen, Hinweise oder Anmerkungen bin ich sehr dankbar.

Paul Jainta, Schwabach