${}^{\text{Die}}\sqrt{\textbf{WURZEL}}$ – Werkstatt Mathematik

Polynome – Teil VI: Die Potenzsummenformeln von NEWTON

In der letzten Ausgabe der „Werkstatt“ haben wir gesehen, dass sich Potenzsummen, etwa die symmetrischen Funktionen $p_k(x,y,z) = x^k + y^k + z^k$, $k \in \mathbb{N}$, mit Hilfe von elementarsymmetrischen Funktionen darstellen lassen. Wir haben uns damals auf Polynome maximal dreier Variablen beschränkt. Dies ist aber nicht notwendig, denn in der Tat gilt die dort getroffene Aussage allgemein für Potenzsummen p_k in n Variablen der Form $p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$, $k \in \mathbb{N}$. Diese Potenzsummen lassen sich auf bekannte Weise (siehe Heft 01/2002, S. 9 ff.) mehr oder weniger verzwickt durch eine Kombination aus verschiedenen elementarsymmetrischen Funktionen ausdrücken.

Wir betrachten das normierte Polynom $f(x)$ vom Grad n, $f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$, $c_i \in \mathbb{R}$, mit den reellen Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$. Einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten c_i und den Potenzsummen hat Isaac NEWTON erstmals erkannt. Nach ihm ist auch der folgende Satz benannt.

Potenzsummenformeln von NEWTON

Gegeben sind die Potenzsummen $p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$, wobei die reellen Zahlen x_i, $i = 1, \ldots, n$, die Lösungen der Gleichung $x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n = 0$ sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_1 + c_1 &= 0 \\ p_2 + c_1p_1 + 2c_2 &= 0 \\ p_3 + c_1p_2 + c_2p_1 + 3c_3 &= 0 \\ &\vdots \\ p_n + c_1p_{n-1} + \ldots + c_{n-1}p_1 + nc_n &= 0 \end{aligned}$$

und

$$p_k + c_1p_{k-1} + \ldots + c_np_{k-n} = 0 \quad \text{für} \quad k > n\,.$$

Wir wollen auf einen allgemeinen Nachweis dieser Relationen verzichten, uns aber deren „Konstruktion“ einmal veranschaulichen. Dazu machen wir eine Rückblende. Es begann mit der Frage: „Wenn man die Werte $x_1 + x_2$ und $x_1 \cdot x_2$ kennt, kann man dann auch die Summe der Quadrate $x_1^2 + x_2^2$ berechnen?“ Die Antwort war einfach, denn $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 x_2$. Auch für die Summe $x_1^3 + x_2^3$ ist es noch unproblematisch gewesen, denn $(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) = x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2$. Damit ergibt sich

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2 \cdot (x_1 + x_2)\,. \qquad (*)$$

Seien nun x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, $a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$, und $p_k = x_1^k + x_2^k$ die k-ten Potenzsummen in den Variablen x_1, x_2. Damit lässt sich die Gleichung (*) auf andere Weise schreiben:

$$p_3 = -\frac{a_1}{a_2} p_2 - \frac{a_0}{a_2} p_1\,.$$

Nach dem Wurzelsatz von VIETA (Heft 01/2002, S. 13 ff.) ist nämlich $x_1 + x_2 = -a_1/a_2$ und $x_1 x_2 = a_0/a_2$. Nach Umstellen folgt daraus $a_2 p_3 + a_1 p_2 + a_0 p_1 = 0$. Diese Darstellung legt weitere Beziehungen für Summen höherer Potenzen nahe.

Beispiel 1 Gegeben ist die Funktion $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Die Polynome p_k, $k = 1, 2$, sind die beiden Potenzsummen aus den Nullstellen x_1, x_2, x_3 von f. Zeige: $a_3 p_2 + a_2 p_1 + 2a_1 = 0$.

Lösung: Wir setzen

$$P := a_3 \left(p_2 + \frac{a_2}{a_3} p_1 + 2\frac{a_1}{a_3} \right)\,.$$

Nach dem Wurzelsatz von VIETA können wir P umformen und vereinfachen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} P &= a_3 \left\{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + [-(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)]\right. \\ &\qquad \left. +2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\right\} \\ &= a_3 \left\{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3)\right. \\ &\qquad \left. +(2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3)\right\} \\ &= 0, \qquad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Man sieht schnell, wie der Hase läuft. Allgemein gilt: Sind $p_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$ die k-ten Potenzsummen der Nullstellen $x_1, \ldots, x_k$ des Polynoms $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, so ergeben sich wie gezeigt sukzessive die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_np_1 + \; a_{n-1} &= 0 \\ a_np_2 + a_{n-1}p_1 + 2a_{n-2} &= 0 \\ a_np_3 + a_{n-1}p_2 + a_{n-2}p_1 + 3a_{n-3} &= 0 \\ a_np_4 + a_{n-1}p_3 + a_{n-2}p_2 + a_{n-3}p_1 + 4a_{n-4} &= 0 \qquad \text{usw.} \end{aligned} \tag{$**$}$$

Für $a_n = 1$, also für ein normiertes Polynom, erhält man die Beziehungen des obigen Satzes. Übrigens sind die Gleichungen ($**$), die die k-ten Potenzsummen der Nullstellen eines Polynoms mit dessen Koeffizienten in Relation setzen, auch unter der Bezeichnung NEWTON-Summen bekannt.

Frage: Wie vereinfachen sich die NEWTON-Summen $a_np_k + a_{n-1}p_{k-1} + \ldots + ka_{n-k}$, wenn $n < k$?

Beispiel 2 Bestimme p_3 für $f(x) = x^2 - 3x + 3$.
Lösung: Aus den NEWTON-Relationen ($**$) folgt unmittelbar:

(1) $p_1 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 3$

(2) $p_2 + (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 3.$

(3) In der nächsten Zeile kommt (wegen $n = 2$) der Term $3a_{-1}$ vor. Da wir aber keinen Koeffizienten a_{-1} haben, setzen wir einfach $a_{-1} = 0$. (Dies beantwortet auch die vorherige Frage.) Es ist also

$$p_3 + (-3) \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_3 = 0\,.$$

Man erkennt aus diesem Beispiel sofort einen besonderen Vorzug von NEWTON-Summen. So haben wir uns hier die Berechnung der Summe der dritten Potenzen der Nullstellen einfach erspart.

Beispiel 3 Bestimme p_3 für das etwas unhandliche Polynom $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 4$.
Lösung: Wir bekommen nacheinander mit Hilfe der Gleichungen ($**$) folgende Werte für p_1 bis p_3: $2p_1 + 3 = 0 \Rightarrow p_1 = -3/2$ bzw. $2p_2 + 3p_1 + 2 = 0 \Rightarrow p_2 = 5/4$ bzw. $2p_3 + 3p_2 + p_1 + 3 \cdot (-4) = 0 \Rightarrow p_3 = 39/8$. Die NEWTON-Summen lassen sich allgemein durch Anwendung der oben verwendeten algebraischen Umformungen beweisen. Wer mit Summationsschreibweisen bzw. -methoden ein wenig vertraut ist, sollte dies ruhig mal ausprobieren.

Wir geben hier nur eine grobe algebraische Begründung der NEWTON-Gleichungen und (auch) nur für die Fälle $k > n$. Es kommt aber ein weiteres nützliches Problemlöseverfahren zum Einsatz. Eine besondere Rolle spielt dabei der Term $a_n p_k$. Das (beliebige) Polynom $f(x)$ vom Grad n hat die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, d. h. für alle i ist $f(x_i) = a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$. Wir multiplizieren jede der n Gleichungen mit dem entsprechenden Term x_i^{k-n} ($i = 1, 2, \ldots, n$) und erhalten die neuen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_n x_1^k + a_{n-1} x_1^{k-1} + \ldots + a_0 x_1^{k-n} &= 0 \\ a_n x_2^k + a_{n-1} x_2^{k-1} + \ldots + a_0 x_2^{k-n} &= 0 \\ &\vdots \\ a_n x_n^k + a_{n-1} x_n^{k-1} + \ldots + a_0 x_n^{k-n} &= 0\,. \end{aligned}$$

Nach Addition aller Gleichungen und Ausklammern ergibt sich schließlich

$$a_n(x_1^k + \ldots + x_n^k) + a_{n-1}(x_1^{k-1} + \ldots + x_n^{k-1}) + \ldots + a_0(x_1^{k-n} + \ldots + x_n^{k-n}) = 0\,.$$

Mit den entsprechenden Abkürzungen folgt daraus nun kürzer: $a_n p_k + a_{n-1} p_{k-1} + \ldots + a_0 p_{k-n} = 0$. Die linken Seiten der Gleichungen stellen die NEWTON-Summen für $k > n$ dar.

Sonderfall: Für $k = n$ wird daraus $p_{k-n} = p_0 = x_1^0 + x_2^0 + \ldots + x_n^0 = n \cdot 1 = n$. Die zugehörige NEWTON-Relation lautet hier: $a_n p_n + a_{n-1} p_{n-1} + \ldots + n a_0 = 0$.

Beispiel 4 Bestimme p_{1000} für $f(x) = x^{1000} - 10x + 10$.

Lösung: Nur die drei Koeffizienten a_{1000}, a_1 und a_0 sind von Null verschieden, daher lässt sich die 1000-te Potenzsumme sofort aus der Gleichung $p_{1000} - 10p_1 + 1000 \cdot 10 = 0$ ableiten. Wegen $a_{999} = 0$ ist auch p_1 gleich null, und somit ist $p_{1000} = -10000$.

Beispiel 5 Das Polynom $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 7$ hat die Nullstellen x_1, x_2, x_3. Berechne den Wert der Summe

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$$

mit Hilfe von NEWTON-Summen.

Lösung: Der gesuchte Wert ist die Summe der reziproken Quadrate der Nullstellen von f. An dieser Stelle taucht daher ein anderes Problem auf: Welches Polynom $g(x)$ hat als Nullstellen gerade die Kehrwerte der Nullstellen des gegebenen Polynoms? Eine Gleichung mit den Lösungen $1/x_1$, $1/x_2$, $1/x_3$ erhält man aber schnell: $f(1/x) = 0$, denn $f(1/(1/x_i)) = f(x_i) = 0$. Aber: Die Funktion $f(1/x)$ ist leider kein Polynom! Da hilft der folgende Trick: Setze $g(x) := x^3 \cdot f(1/x)$. Das Polynom g besitzt dann ebenfalls die Nullstellen $1/x_1$, $1/x_2$, $1/x_3$. Das gesuchte Polynom hat jetzt die Gleichung $g(x) = x^3(1/x^3 - 6/x^2 + 5/x - 7) = -7x^3 + 5x^2 - 6x + 1$. Ein Vergleich mit $f(x)$ zeigt: Die Koeffizienten von g sind identisch mit denen von f, nur in umgekehrter Reihenfolge. Der gesuchte Termwert für $1/x_1^2 + 1/x_2^2 + 1/x_3^2$ ist daher die Summe der Nullstellen des neuen Polynoms g. Mit den NEWTON-Relationen erhalten wir sofort: $a_3p_1 + a_2 = 0 \Rightarrow p_1 = 5/7$; aus $a_3p_2 + a_2p_1 + 2a_1 = 0$ folgt $-7p_2 + 25/7 - 12 = 0$ und daraus $p_2 = -59/49$.

Beispiel 6 Für die reellen Zahlen a, b, c gilt: $a + b + c = 0$. Zeige die Gültigkeit der Gleichung:

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\,.$$

Lösung: Die reellen Zahlen seien die Nullstellen eines Polynoms $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$. Ein kurzer Blick zeigt, dass in den Zählern die Potenzsummen p_5, p_2 und p_3 stehen. Die entsprechenden NEWTON-Beziehungen ergeben hier: $1 \cdot p_1 + p = 0$ d. h. $p_1 = -p$. Der Wurzelsatz von VIETA liefert aber $p = -(a + b + c) = 0$ (nach Voraussetzung). Also ist $p_1 = 0$. Damit ist $1 \cdot p_2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot q = 0$ und daraus folgt $p_2 = -2q$. Weiter ergibt sich $1 \cdot p_3 + 0 + q \cdot 0 + 3 \cdot r = 0$, d. h. $p_3 = -3r$ und schließlich $1 \cdot p_5 + 0 + q \cdot (-3r) + r \cdot (-2q) = 0$, d. h. $p_5 = 5 \cdot qr$. Ein Vergleich führt zum Ergebnis, denn $6 \cdot p_5 = 5 \cdot p_2 \cdot p_3$. Diese Gleichung ist zur angegebenen äquivalent.

Selbst kompliziert anmutende Systeme von Gleichungen lassen sich gelegentlich mit der beschriebenen Methode der NEWTON-Relationen auf elegante Weise „klein kriegen“, wie das letzte Beispiel beweist.

Beispiel 7 Bestimme alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} x \;\; + y \;\; + z \;\; &= 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 36 \end{aligned}$$

Lösung: Wir suchen uns einfach ein passendes kubisches Polynom f mit den Nullstellen x, y, z: $f(t) = a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0$. Die NEWTON-Relationen lauten in diesem Fall:

$$a_3p_1 + a_2 = 0 \tag{1}$$
$$a_3p_2 + a_2p_1 + 2a_1 = 0 \tag{2}$$
$$a_3p_3 + a_2p_2 + a_1p_1 + 3a_0 = 0 \tag{3}$$

Wegen $p_1 = 6$, $p_2 = 14$ und $p_3 = 36$ können wir der Reihe nach das einfachere System auf eine einzige Gleichung reduzieren. Mit $a_3 = 1$ ergibt sich aus (1) $a_2 = -6$ und aus (2) $a_1 = 11$ und schließlich $a_0 = -6$.

Dies liefert letztlich die Gleichung $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$ oder äquivalent hierzu $(t-1)(t-2)(t-3) = 0$ mit den Lösungen $x = 1$, $y = 2$ und $z = 3$.

Auf Grund der Symmetrie des ursprünglichen Gleichungssystems sind $(1;\ 2;\ 3)$ und deren Permutationen die Lösungen desselben.

Und damit sind wir auch wieder bei den „Hausaufgaben“ angekommen. Das erste Problem ist im Jahr 1972 den Teilnehmern an der US-Mathematik-Olympiade gestellt worden. Es wurde damals als ziemlich schwer eingestuft. Mit Kenntnis der NEWTON-Relationen dürfte sich aber der Schwierigkeitsgrad nun in Grenzen halten. Die restlichen Aufgaben stammen ebenfalls aus Übersee, aus Kanada, Australien und dem asiatisch-pazifischen Raum.

Aufgabe 31 Bestimme alle reellen Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} x \;\; + y \;\; + z \;\; &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 &= 3\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 32 Zeige: Unter 7 verschiedenen reellen Zahlen gibt es stets (mindestens) zwei Zahlen x, y mit $0 \leq \dfrac{x-y}{1+xy} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(Canadian Mathematical Olympiad 1984)

Aufgabe 33 Der Term $f(n)$ ist die Summe der ersten n Glieder der Folge 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, ...

a) Bestimme $f(n)$.

b) Zeige: $f(s+t) - f(s-t) = st$, wobei s, t positive ganze Zahlen mit $s > t$ sind.

(Australian Mathematical Olympiad 1985)

Aufgabe 34 Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC. Innerhalb der Seiten AB bzw. BC liegen die Punkte D, E so, dass $DE \parallel AC$ und DE Tangente an den Inkreis des gegebenen Dreiecks ist. Zeige: $8 \cdot DE \leq AB + BC + CA$.
Hinweis: Die Schreibweise AB für eine Streckenlänge $\overline{AB}$ ist international üblich. (Australian Mathematical Olympiad 1998)

Aufgabe 35 Gegeben ist die Menge $M = \{1, 2, \ldots, N\}$. Für welchen größten Wert von N ist die Anzahl der durch 3 teilbaren Zahlen aus M gleich der Anzahl von Zahlen aus M, die durch 5 oder 7 (oder durch beide) teilbar sind? (XIIIth Asian Pacific Mathematics Olympiad)

Viel Spaß nun bei der Auseinandersetzung mit den exotischen Fragestellungen. Das nächste Mal wollen wir die Lösung kniffliger Gleichungssysteme u. a. mit Hilfe symmetrischer Funktionen handlicher machen, und es gibt noch ein weiteres Werkzeug zur Bearbeitung von Problemen aus der Welt der Polynome. Wenn Sie neue Lösungen und/oder Ideen haben, dann schreiben Sie an die folgende Adresse:

Paul Jainta, Werkvolkstraße 10, 91126 Schwabach

oder als E-Mail an paul.jainta@fuemo.de bzw. p.jainta@odn.de .

Paul Jainta, Schwabach

(erschienen in $\sqrt{WURZEL}$ 12/2002)