Eine Bemerkung zum JMC-Beitrag von Cimpeanu

1 Einleitung

In seinem Beitrag [2] zum Junior Mathematical Congress (JMC) 2008 betrachtet Radu Cimpeanu Summen der Gestalt

$$S_n(a,b) = -F(a+n) + \sum_{k=0}^{n} F'(b+k) \tag{1}$$

mit reellen Zahlen a, b und untersucht ihr asymptotisches Verhalten für $n \to \infty$. Etwas genauer ausgedrückt berechnet Cimpeanu unter gewissen Bedingungen an die Funktion F die beiden Grenzwerte

$$\begin{aligned} L_1 &:= \lim_{n\to\infty} n(S_n(a,b) - S(a,b))\,, \\ L_2 &:= \lim_{n\to\infty} n(n(S_n(a,b) - S(a,b)) - L_1) \end{aligned}$$

(vgl. [3, OQ 2210]), wobei vorausgesetzt wird, dass

$$S(a,b) := \lim_{n\to\infty} S_n(a,b) \tag{2}$$

existiert. Das wesentliche Hilfsmittel ist eine Variante des Satzes von Stolz und Cesàro, die Cimpeanu [2, Theorem 3] zunächst beweist.

Das Ziel dieser Anmerkung ist es, das asymptotische Verhalten der Folge $(S_n(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ etwas tiefergehend zu untersuchen. Unter geeigneten Voraussetzungen besitzt diese Folge eine asymptotische Entwicklung der Form

$$S_n(a,b) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} c_k(a,b) \qquad (n\to\infty) \tag{3}$$

mit von n unabhängigen Koeffizienten $c_k(a,b)$. Diese Beziehung bedeutet, dass für jede nichtnegative ganze Zahl q

$$S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{n^k} c_k(a,b) + o(n^{-q}) \qquad (n \to \infty)$$

gilt. Es ist klar, dass mit den obigen Bezeichnungen

$$c_0(a,b) = S(a,b), \quad c_1(a,b) = L_1, \quad c_2(a,b) = L_2$$

gilt, sodass die Berechnung von L_1 und L_2 den Anfang der asymptotischen Entwicklung liefert. Als konkrete Anwendungen seines Theorems 3 untersucht Cimpeanu die beiden Folgen

$$x_n = -\pi \ln(a+n) + \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{b+k}\right)$$

(siehe [3, OQ 2211]) und

$$x_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \tan \frac{1}{k}$$

(siehe [3, OQ 2212]). Da beide Folgen keine unmittelbaren Spezialfälle der Gleichung (1) sind, definieren wir im Folgenden etwas allgemeiner

$$S_n(a,b) = H(a+n) + \sum_{k=0}^{n} F'(b+k)\,. \tag{4}$$

Die Koeffizienten $c_k(a,b)$ in Gleichung (3) hängen dann von den beiden Funktionen H und F' ab.

Satz 1. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Gegeben seien Funktionen H und F, deren Ableitungen in für $t \geq a$ bzw. $t \geq b$ konvergente Laurent-Reihen*

$$F'(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu t^{-\nu} \quad (t \geq a), \qquad H'(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu t^{-\nu} \quad (t \geq b) \tag{5}$$

entwickelbar sind mit

$$h_1 + f_1 = 0. \tag{6}$$

Dann existiert der Grenzwert (2) und die in (4) definierte Folge $(S_n(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt die vollständige asymptotische Entwicklung

$$S_n(a,b) \sim S(a,b) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} c_k(a,b) \qquad (n \to \infty)$$

mit Koeffizienten

$$c_k(a,b) = -\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \left(h_{k+1-i} a^i + F_{k+1-i} b^i\right), \tag{7}$$

wobei

$$F_\nu = \sum_{\ell=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{\ell} B_\ell f_{\nu-\ell} \qquad (\nu = 1, \ldots, q) \tag{8}$$

und B_ℓ die Bernoulli-Zahlen bezeichnen.

Bemerkung 2. *Aus Gleichung (5) folgt die Existenz sämtlicher Ableitungen mit*

$$F^{(\ell+1)}(t) = (-1)^\ell \ell! \sum_{\nu=\ell+1}^{\infty} \binom{\nu-1}{\ell} f_{\nu-\ell} t^{-\nu} \qquad (\ell = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Insbesondere ergibt sich

$$\lim_{t\to+\infty} t^\ell F^{(\ell)}(t) = (-1)^{\ell-1}(\ell-1)! f_1 \qquad (\ell = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

(die Existenz dieser Grenzwerte wird von Cimpeanu [2, Seite 154] vorausgesetzt).

Bemerkung 3. *Gleichung (8) liefert*

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_1 \\
F_2 &= B_0 f_2 + B_1 f_1 = f_2 - \frac{1}{2} f_1 \\
F_3 &= B_0 f_3 + 2B_1 f_2 + B_2 f_1 = f_3 - f_2 + \frac{1}{6} f_1 \\
F_4 &= B_0 f_4 + 3B_1 f_3 + 3B_2 f_2 + B_3 f_1 = 4f_4 - \frac{3}{2} f_3 + \frac{1}{2} f_2 \\
F_5 &= B_0 f_5 + 4B_1 f_4 + 6B_2 f_3 + 4B_3 f_2 + B_4 f_1 = f_5 - 2f_4 + f_3 - \frac{1}{30} f_1 \\
F_6 &= f_6 - \frac{5}{2} f_5 + \frac{5}{3} f_4 - \frac{1}{6} f_2
\end{aligned}$$

Damit erhält man aus (7) *unter Beachtung von* (6) *die ersten Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung* (3)*. Aus Platzgründen beschränken wir uns auf*

$$c_1(a,b) = \left(b - a + \frac{1}{2}\right) f_1 - f_2 - h_2\,,$$
$$c_2(a,b) = \frac{1}{2}\left[\left(a^2 - b^2 - b - \frac{1}{6}\right) f_1 + (2b+1) f_2 - f_3 + 2a h_2 - h_3\right].$$

Beweis: Als Hilfsmittel verwenden wir die Eulersche Summenformel für q-mal stetig differenzierbare Funktionen f:

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)dt + \sum_{\ell=1}^{q} (-1)^\ell \frac{B_\ell}{\ell!}\left\{f^{(\ell-1)}(n) - f^{(\ell-1)}(m)\right\}$$
$$+ \frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_m^n B_q(t - \lfloor t \rfloor) f^{(q)}(t)dt\,,$$

wobei $B_\ell(\cdot)$ die Bernoulli-Polynome und $B_\ell = B_\ell(0)$ die Bernoulli-Zahlen bezeichnen (siehe z. B. [1, Theorem D.2.1, p. 619]). Daraus folgt unter Beachtung von $B_0 = 1$

$$S_n(a,b) = H(a+n) + F'(b) + \sum_{\ell=0}^{q} (-1)^\ell \frac{B_\ell}{\ell!}\left\{F^{(\ell)}(b+n) - F^{(\ell)}(b)\right\}$$
$$+ \frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_0^n B_q(t - \lfloor t \rfloor) F^{(q+1)}(b+t)dt\,.$$

Aus der Eigenschaft (9) folgt (wobei $n \to \infty$)

$$\left|\int_n^\infty B_q(t-\lfloor t\rfloor)F^{(q+1)}(b+t)dt\right| \le c_q \int_n^\infty \frac{1}{(b+t)^{q+1}}dt = O(n^{-q})\,.$$

Zur Vereinfachung der Notation definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} G_{a,b,q}(x) = H\left(a+\frac{1}{x}\right) + F'(b) \\ + \sum_{\ell=0}^{q}(-1)^\ell \frac{B_\ell}{\ell!}\left\{F^{(\ell)}\left(b+\frac{1}{x}\right) - F^{(\ell)}(b)\right\} + I_q, \end{aligned} \tag{10}$$

wobei

$$I_q = \frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_0^\infty B_q(t-\lfloor t\rfloor)F^{(q+1)}(b+t)dt\,.$$

Damit gilt

$$S_n(a,b) = G_{a,b,q}(1/n) + O(n^{-q}) \qquad (n\to\infty)\,. \tag{11}$$

Aus Voraussetzung (5) folgt durch Integration von H' bzw. F' für beliebiges $x_0 > 0$:

$$\begin{aligned} H\left(a+\frac{1}{x}\right) - H(x_0) &= h_1 \log\frac{ax+1}{x_0 x} + \sum_{\nu=2}^\infty h_\nu \frac{\left(\frac{ax+1}{x}\right)^{-\nu+1} - x_0^{-\nu+1}}{-\nu+1}\,, \\ F\left(b+\frac{1}{x}\right) - F(x_0) &= f_1 \log\frac{bx+1}{x_0 x} + \sum_{\nu=2}^\infty f_\nu \frac{\left(\frac{bx+1}{x}\right)^{-\nu+1} - x_0^{-\nu+1}}{-\nu+1} \end{aligned}$$

und damit wegen $h_1 + f_1 = 0$

$$H\left(a+\frac{1}{x}\right)+F\left(b+\frac{1}{x}\right)-F(x_0)-H(x_0)=$$
$$f_1\log\frac{bx+1}{ax+1}+\sum_{\nu=2}^{\infty}h_\nu\frac{\left(\frac{ax+1}{x}\right)^{-\nu+1}-x_0^{-\nu+1}}{-\nu+1}+\sum_{\nu=2}^{\infty}f_\nu\frac{\left(\frac{bx+1}{x}\right)^{-\nu+1}-x_0^{-\nu+1}}{-\nu+1}.$$

(Für $x<0$ wählt man einfach einen beliebigen, aber festen, Zweig des Logarithmus. Die „Problemterme“ $\log x_0x$ heben sich dann beim Subtrahieren weg.)
Lassen wir x_0 gegen Unendlich streben, folgt die Existenz des Grenzwerts $\lim\limits_{t\to+\infty}(F(t)+H(t))$ und

$$H\left(a+\frac{1}{x}\right)+F\left(b+\frac{1}{x}\right)=$$
$$\lim_{t\to+\infty}(F(t)+H(t))+f_1\log\frac{bx+1}{ax+1}-\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{h_\nu\left(\frac{x}{ax+1}\right)^{\nu-1}+f_\nu\left(\frac{x}{bx+1}\right)^{\nu-1}}{\nu-1}.$$

In Verbindung mit Voraussetzung (5) folgt daraus, dass $G_{a,b,q}$ in einer Umgebung von 0 analytisch ist. Insbesondere existiert

$$G_{a,b,q}(0)=\lim_{x\to 0}G_{a,b,q}(x)\,,$$

was nach (11) äquivalent zur Existenz der Grenzwertes (2) ist. Da $G_{a,b,q}(x)$ im Punkt $x=0$ analytisch ist, kann die Funktion in einer gewissen Umgebung von $x=0$ in eine Potenzreihe

$$G_{a,b,q}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{G_{a,b,q}^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

entwickelt werden mit $G_{a,b,q}(0) = S(a,b)$, so dass

$$S_n(a,b) = S(a,b) + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{c_k(a,b)}{n^k} + O(n^{-q}) \qquad (n \to \infty)$$

mit Koeffizienten

$$c_k(a,b) = \frac{1}{k!} G_{a,b,q}^{(k)}(0)\,.$$

Wir berechnen die erste Ableitung

$$\begin{aligned} G'_{a,b,q}(x) &= -x^{-2}\left[H'\left(a+\frac{1}{x}\right) + \sum_{\ell=0}^{q}(-1)^\ell \frac{B_\ell}{\ell!} F^{(\ell+1)}\left(b+\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= -x^{-2}\left[H'\left(\left(\frac{x}{ax+1}\right)^{-1}\right) + \sum_{\ell=0}^{q} B_\ell \sum_{\nu=\ell+1}^{\infty} \binom{\nu-1}{\ell} f_{\nu-\ell}\left(\frac{x}{bx+1}\right)^\nu\right] \\ &= -x^{-2}\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu \left(\frac{x}{ax+1}\right)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu^{[q]} \left(\frac{x}{bx+1}\right)^\nu\right] \end{aligned}$$

mit

$$F_\nu^{[q]} := \sum_{\ell=0}^{q} \binom{\nu-1}{\ell} B_\ell f_{\nu-\ell} \quad (\nu \in \mathbb{N})\,.$$

Zweifellos gilt $F_\nu^{[q]} = F_\nu$ für $1 \le \nu \le q+1$.

Für eine in einer Umgebung von 0 analytische Funktion

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j$$

und $c \in \mathbb{R}$ gilt für $|cx| < 1$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{cx+1}\right) &\overset{(*)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(\frac{x}{cx+1}\right)^j = f_0 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j x^j \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{i} (-cx)^i \\ &= f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} f_{k-i} (-c)^i \\ &= f_0 + f_1 x + (f_2 - c f_1) x^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Bei der Umformung $(*)$ wird $(cx+1)^{-j}$ als $(\sum_{i=0}^{\infty}(-cx)^i)^j$ geschrieben. Die Binomialkoeffizienten geben dann die Häufigkeit des Auftretens der jeweiligen Potenz im Produkt an. Man erhält sie induktiv, analog zur Formel für die Kombination mit Wiederholung.

Wendet man obige Beziehung auf die Funktion $G'_{a,b,q}$ an, ergibt sich

$$G'_{a,b,q}(x) = -x^{-2}\left[h_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} h_{k-i}(-a)^i + F_1^{[q]} x + \sum_{k=2}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} F_{k-i}^{[q]}(-b)^i\right]$$

und wegen $h_1 + F_1^{[q]} = h_1 + f_1 = 0$ schließlich

$$G'_{a,b,q}(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} \left(h_{k+2-i} a^i + F_{k+2-i}^{[q]} b^i\right).$$

Daraus erhalten wir für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$ unmittelbar

$$G_{a,b,q}^{(k)}(0) = -(k-1)! \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \left(h_{k+1-i} a^i + F_{k+1-i}^{[q]} b^i\right).$$

Da $q \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt werden kann, ist Satz 1 damit bewiesen.

Beispiel 1

Wir wenden nun den Satz an auf das Beispiel

$$S_n = -\pi \ln(a+n) + \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{b+k}\right)$$

für $a, b > 0$ (siehe [3, OQ 2211]). Hier gilt

$$H(x) = -\pi \ln x, \quad H'(x) = \frac{-\pi}{x}, \quad F'(x) = \sin\frac{\pi}{x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} \left(\frac{\pi}{x}\right)^{2\nu+1}$$

und damit

$$h_1 = -\pi, \quad h_\nu = 0\,(\nu \geq 2) \quad f_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}\pi^{2\nu+1}, \quad f_{2\nu} = 0\,(\nu \in \mathbb{N}_0).$$

Satz 1 liefert die Koeffizienten

$$c_k(a,b) = \frac{1}{k!}G^{(k)}_{a,b,q}(0) = \frac{(-1)^k}{k}\left(\pi a^k - \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}F_{k+1-i}b^i\right),$$

wobei nach Bemerkung 3

$$F_1 = \pi, \quad F_2 = -\frac{1}{2}\pi, \quad F_3 = \frac{1}{6}(\pi - \pi^3), \quad F_4 = \frac{1}{4}\pi^3.$$

Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned} c_1(a,b) &= -\pi a - F_2 + F_1 b = \pi\left(b - a + \frac{1}{2}\right) \\ c_2(a,b) &= \frac{\pi}{2}\left(a^2 - b^2 - b + \frac{1}{6}(\pi^2 - 1)\right) \\ c_3(a,b) &= \frac{\pi}{12}(-4a^3 + (2b+1)(2b^2 + 2b - \pi^2)) \end{aligned}$$

Beispiel 2

Statt S_n (siehe [3, OQ 2212]) betrachten wir

$$S_{n+1} = -\ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n+1} \tan\frac{1}{k} = -\ln(n+1) + \sum_{k=0}^{n} \tan\frac{1}{k+1}$$

mit $a = b = 1$, wobei

$$\begin{aligned}
H(x) &= -\ln x, \quad H'(x) = \frac{-1}{x}, \quad h_1 = -1, \quad h_\nu = 0\ (\nu \geq 2),\\
F'(x) &= \tan\frac{1}{x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{4^\nu(4^\nu-1)B_{2\nu}}{(2\nu)!}\left(\frac{1}{x}\right)^{2\nu-1}\\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{15x^5} + \frac{17}{315x^7} + \cdots \qquad \left(x > \frac{2}{\pi}\right),\\
f_{2\nu-1} &= (-1)^{\nu-1}\frac{4^\nu(4^\nu-1)B_{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad f_{2\nu} = 0\ (\nu \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$S_{n+1} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} c_k(1,1) \qquad (n \to \infty)$$

mit

$$c_k(1,1) = \frac{1}{k}\left((-1)^k - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} F_{k+1-i}\right) .$$

Nach Bemerkung 3 erhalten wir die folgenden Werte:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_k	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{30}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{45}$	$-\frac{17}{90}$	$\frac{859}{5670}$	$-\frac{31}{315}$
$c_k(1,1)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{223}{120}$	3	$-\frac{658}{135}$	$\frac{1667}{210}$	$-\frac{117377}{9072}$	$\frac{19939}{945}$	$-\frac{4881007}{141750}$

Literaturverzeichnis

[1] G. E. Andrews, R. Askey und R. Roy: *Special functions. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 71*. Cambridge University Press, Cambridge 2000.

[2] R. Cimpeanu: *The Stolz-Cesàro Theorem – Highlights and Applications –*. $\sqrt{\text{WURZEL}}$, Heft 7+8/2008, Seiten 147–156.

[3] Octogon Mathematical Magazine, Vol. 14, No. 1, April 2006, Fulgur Publ. (2006).

Ulrich Abel, Gießen-Friedberg