

# Spieltheorie 2 – Ökonomische Modelle

von LEV MARKHASIN, Jena

Im Anschluss an den Einführungsartikel [1] zur Spieltheorie im letzten Heft wenden wir uns nun Anwendungen aus der Marktwirtschaft zu. Dabei geht es darum, dass zwei oder mehrere Unternehmen ein Produkt herstellen und miteinander auf dem Markt konkurrieren. Jedes Unternehmen hat seine eigene Technologie, von der die Produktionskosten abhängen. Diese beeinflussen natürlich den Preis, von dem wiederum der Absatz abhängen wird und damit auch der Profit. Für die Unternehmen soll das Ziel gelten, den Profit zu maximieren. Als strategische Variablen können der Preis, die Quantität, die Qualität, die Werbung sowie Investitionen in Entwicklung u. a. fungieren. Wir werden den Markt durch unterschiedliche Modelle beschreiben. Es gibt zwei Möglichkeiten der Betrachtung der Entscheidungen der Unternehmen: Entweder gehen wir davon aus, dass Entscheidungen simultan und ohne das Wissen über die Entscheidungen anderer getroffen werden oder sie können nacheinander getroffen werden. Wir wollen annehmen, dass alle Unternehmen über die Technologie der Konkurrenz informiert sind, d. h., die strategischen Profile sind gemeinsames Wissen. Man bedenke, dass es sich bei allen Modellen um Annäherungen der Realität handelt und viele Faktoren weggelassen werden.

## 1 Das Modell von Cournot

Wir beginnen mit dem einfachsten Modell. Dabei wählen die Unternehmen ihre Strategien simultan. Es wurde von Augustin Cournot im Jahr 1838 formuliert. Die Idee hinter dem Modell ist, dass jedes Unternehmen sich auf eine Produktionsmenge festlegt und das Produkt dann auf den Markt wirft. Die Nachfrage bestimmt dann den Preis, der sich in einem Gleichgewicht einpendelt. Mit  $y_i$  bezeichnen wir die Menge des hergestellten Produkts des  $i$ -ten Unternehmens, mit  $Y = y_1 + \dots + y_N$  die Gesamtmenge des Produkts auf dem Markt. Das strategische Profil bezeichnen wir mit  $y = (y_1, \dots, y_N)$ . Den Profit des  $i$ -ten Unternehmens bezeichnen wir mit  $\Pi_i$ . Das Modell geht davon aus, dass eine Veränderung von  $y_i$  keinen Einfluss auf  $y_j$  ( $j \neq i$ ) nimmt. Diese Annahme ist nicht unrealistisch, wenn die Produktion des  $i$ -ten Unternehmens ein kleiner Teil der Gesamtproduktion ist. Das Gleichgewicht dieses Modells nennt man Nash-Cournot-Gleichgewicht. Mit  $p = p(Y)$  bezeichnen wir den Preis des Produkts, der sich in Abhängigkeit vom Angebot entsprechend der Nachfrage einpendelt. Mit  $C_i(y_i)$  bezeichnen wir die Produktionskosten, die natürlich von der Menge und den Technologien

abhängen. Der Profit des  $i$ -ten Unternehmens berechnet sich dann folgendermaßen:

$$\Pi_i(y) = p(Y)y_i - C_i(y_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Unser Ziel ist es den Profit zu maximieren, also suchen wir

$$\max_{y_i} \Pi_i(y) = \max_{y_i} [p(Y)y_i - C_i(y_i)], \quad i = 1, \dots, N.$$

Das Nash-Cournot-Gleichgewicht ist der Mengenvektor  $y^* = (y_1^*, \dots, y_N^*)$ , der für alle  $i$  gleichzeitig den Profit maximiert. Dazu müssen wir nach  $y_i$  ableiten und null setzen. Wir suchen also den Mengenvektor  $y^*$ , der das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p(Y) + y_1 \frac{\partial p(Y)}{\partial y_1} - \frac{\partial C_1}{\partial y_1} &= 0 \\ \vdots & \\ p(Y) + y_N \frac{\partial p(Y)}{\partial y_N} - \frac{\partial C_N}{\partial y_N} &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt. Wir müssen zusätzlich fordern, dass die Funktionen des Profits konkav sind, sodass wir nicht die zweiten Ableitungen berücksichtigen müssen. Ist das Gleichungssystem gelöst, so kann man mit den Quantitäten ausrechnen, wie sich der Preis einpendeln wird sowie welche Produktionskosten und welcher Gewinn zu erwarten sind. Zur Veranschaulichung betrachten wir nun den linearen Fall und zur Einfachheit mit nur zwei Unternehmen.

**Beispiel.** *Wir haben also einen Markt, auf dem zwei Unternehmen tätig sind und ihr Produkt in Konkurrenz zu einander absetzen. Der Preis hänge dabei linear von der Gesamtmenge ab, d. h. für  $a, b > 0$*

$$p = a - bY = a - b(y_1 + y_2).$$

*Zur Einfachheit wählen wir lineare Kostenfunktionen und nehmen an, dass der mengenunabhängige Anteil null ist. Also*

$$C_i(y_i) = k_i y_i \quad \text{mit } k_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

Der Profit ist damit

$$\Pi_i = (a - b(y_1 + y_2))y_i - k_i y_i.$$

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} &= a - 2by_1 - by_2 - k_1 = 0 \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial y_2} &= a - 2by_2 - by_1 - k_2 = 0. \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich also

$$y_1^* = \frac{a - 2k_1 + k_2}{3b} \quad \text{und} \quad y_2^* = \frac{a - 2k_2 + k_1}{3b}.$$

Der Preis im Gleichgewicht ist

$$p^* = a - b(y_1^* + y_2^*) = \frac{a + k_1 + k_2}{3}.$$

Der Profit der Unternehmen ist damit

$$\Pi_1^* = \frac{(a - 2k_1 + k_2)^2}{9b} \quad \text{bzw.} \quad \Pi_2^* = \frac{(a - 2k_2 + k_1)^2}{9b}.$$

Man kann jetzt verstehen, wieso es sich bei dem Cournot-Gleichgewicht gleichzeitig um das Nash-Gleichgewicht handelt. Es lohnt sich für ein Unternehmen nicht einseitig die Quantität zu ändern, da der Profit dann nicht optimal wäre. Deshalb spricht man vom Nash-Cournot-Gleichgewicht. Als kleine Übungsaufgabe berechne man die Quantitäten, den Preis und die Profite im Gleichgewicht für  $N$  Unternehmen mit Kostenfunktionen  $C_i(y_i) = ky_i$  für alle  $i$ .

## 2 Kollaboration und Verrat

Die beiden Unternehmen aus dem vorherigen Abschnitt entschließen sich nun ihre Einkünfte zu erhöhen, indem sie sich zu einem Kartell zusammenschließen. Das heißt, anstatt den Preis vom Markt bestimmen zu lassen, sprechen sie sich ab und bestimmen selbst den Preis. Dabei geht es darum, dass der Gesamtprofit der Branche über die Gesamtmenge der Produktion maximiert wird. Dabei nehmen wir an, dass die beiden Unternehmen die gleiche Technologie besitzen, also  $k = k_1 = k_2$ . Der Gesamtprofit ist dabei

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = (a - b(y_1 + y_2))(y_1 + y_2) - k(y_1 + y_2) = (a - bY)Y - kY.$$

Um über die Gesamtmenge zu maximieren, leiten wir nach  $Y$  ab und setzen null:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = a - 2bY - k = 0.$$

Damit erhalten wir

$$Y = \frac{a - k}{2b}.$$

Die Produktion des einzelnen Unternehmens ist die Hälfte der gesamten Produktion. Somit erhalten wir

$$y_1^K = y_2^K = \frac{a - k}{4b}$$

zum Preis von

$$p^K = a - bY = \frac{a+k}{2}$$

und die Profite sind

$$\Pi_1^K = \Pi_2^K = \frac{(a-k)^2}{8b}.$$

Wir erinnern uns, dass im letzten Abschnitt die Ergebnisse bei gleichen Produktionskosten

$$y_1^* = y_2^* = \frac{a-k}{3b}, \quad p^* = \frac{a+2k}{3}, \quad \Pi_1^* = \Pi_2^* = \frac{(a-k)^2}{9b}$$

gewesen wären. Das heißt, in einem Kartell können die Unternehmen eine kleinere Menge herstellen, diese zum höheren Preis verkaufen und einen höheren Profit erwirtschaften.

Nun haben sich die beiden Unternehmen auf Kooperation geeinigt. Während sich das zweite Unternehmen an die Vereinbarung hält, rechnet das erste noch mal nach. Was passiert, wenn es sich nicht daran hält? Der Profit des ersten Unternehmens unter der Annahme  $y_2 = y_2^K$  ist

$$\Pi_1(y_1, y_2^K) = \left( a - b \left( y_1 + \frac{a-k}{4b} \right) \right) y_1 - k y_1.$$

Wir berechnen das Maximum:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} = a - \frac{a-k}{4} - 2b y_1 - k = \frac{3}{4}a - \frac{3}{4}k - 2b y_1 = 0.$$

Damit ergibt sich

$$y_1^V = \frac{3}{8} \cdot \frac{a-k}{b}.$$

Das erste Unternehmen würde also im Fall des Verrats die Produktionsmenge heimlich erhöhen. Der Preis würde sich dann auf

$$p^V = a - b(y_1^V + y_2^K) = a - \frac{5}{8} \cdot (a-k) = \frac{3}{8}a + \frac{5}{8}k$$

einpendeln. Von einem Verrat würden also die Verbraucher profitieren, da der Preis fallen würde. Die Profite sind dann

$$\Pi_1^V = \frac{9}{64} \frac{(a-k)^2}{b}, \quad \text{bzw.} \quad \Pi_2^{KV} = \frac{3}{32} \frac{(a-k)^2}{b}.$$

Also steigt der Profit des Verräters, während das ehrliche Kartellmitglied den Kürzeren zieht. Es gilt

$$\Pi_i^{KV} < \Pi_i^* < \Pi_i^K < \Pi_i^V.$$

Wir veranschaulichen uns das Problem, indem wir die Profite in eine Matrix schreiben, wobei wir  $g = a - k$  setzen.

|                   |                                      |                                      |
|-------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
|                   | Kooperation                          | keine Kooperation                    |
| Kooperation       | $\frac{g^2}{8b}, \frac{g^2}{8b}$     | $\frac{3g^2}{32b}, \frac{9g^2}{64b}$ |
| keine Kooperation | $\frac{9g^2}{64b}, \frac{3g^2}{32b}$ | $\frac{g^2}{9b}, \frac{g^2}{9b}$     |

Der Leser möge sich nochmal die Tabelle vom Gefangenendilemma aus dem ersten Teil anschauen. Man stellt fest, dass es sich dabei tatsächlich um ein analoges Problem handelt. Die Lösung ist also der nicht-kooperative Markt, den wir im letzten Abschnitt betrachtet haben.

### 3 Modell von von Stackelberg

Heinrich von Stackelberg schlug im Jahr 1934 ein weiteres Modell vor. Es unterscheidet sich sehr stark von Cournot. Dabei geht es um einen Markt, der von einem Unternehmen beherrscht wird, das die Bedingungen diktiert. Die anderen Unternehmen warten die Entscheidungen des Marktführers ab und entscheiden sich anschließend. Wir werden wieder nur zwei Unternehmen betrachten. Die Verallgemeinerung auf  $N$  Unternehmen ist jedoch nicht schwer und sei dem interessierten Leser überlassen.

Es beginnt also der Marktführer (L wie Leader). Er versucht seinen Profit

$$\Pi_L(y_L, y_F) = p(Y)y_L - C_L(y_i)$$

zu maximieren, indem er die richtige Menge produziert. Dabei muss er schätzen, wie der Konkurrent (F wie Follower) handeln wird. Der Leader berechnet also zuerst die Antwortfunktion des Marktfolgers. Das funktioniert wiederum indem die Profitfunktion

$$\Pi_F(y_L, y_F) = p(y_L, y_F)y_F - C_F(y_F)$$

nach  $y_F$  abgeleitet und null gesetzt wird. Anschließend wird die Gleichung nach  $y_F$  umgestellt und man erhält  $y_F = R(y_L)$  die Antwortfunktion des Folgers. Diese wird in die Profitfunktion des Marktführers eingesetzt, sodass sie nur noch von  $y_L$  abhängt. Sie wird anschließend maximiert, indem sie nach  $y_L$  abgeleitet und null gesetzt wird. Man stellt diese Gleichung dann nach  $y_L$  um und erhält die Strategie des Marktführers. Die Strategie des Marktfolgers ergibt sich dann ebenfalls über die Antwortfunktion.

Betrachten wir das gleiche Beispiel, das wir im Abschnitt über das Cournotmodell betrachtet haben, d. h., der Preis und die Produktionskosten hängen linear von der produzierten Menge ab:

$$p(Y) = a - bY = a - b(y_L + y_F), C_L(y_L) = k_L y_L, C_F(y_F) = k_F y_F.$$

Also

$$\Pi_F(y_L, y_F) = (a - b(y_L + y_F))y_F - k_F y_F.$$

Nach dem Ableiten erhalten wir

$$\frac{\partial \Pi_F}{\partial y_F} = a - by_L - 2by_F - k_F = 0$$

und stellen um:

$$y_F = R(y_L) = \frac{a - by_L - k_F}{2b}.$$

Dann maximieren wir

$$\begin{aligned} \Pi_L(y_L) &= \Pi_L(y_L, R(y_L)) = \left( a - b \left( y_L + \frac{a - by_L - k_F}{2b} \right) \right) y_L - k_L y_L \\ &= \frac{a - 2k_L + k_F}{2} y_L - \frac{b}{2} y_L^2 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Ableitung:

$$\frac{\partial \Pi_L}{\partial y_L} = \frac{a - 2k_L + k_F}{2} - by_L = 0.$$

Die Lösung lautet also

$$\begin{aligned} y_L^* &= \frac{a - 2k_L + k_F}{2b}, \\ y_F^* &= R(y_L^*) = \frac{a - b \frac{a - 2k_L + k_F}{2b} - k_F}{2b} = \frac{a + 2k_L - 3k_F}{4b}. \end{aligned}$$

Das Produkt wird zum Preis

$$p^* = a - b(y_L^* + y_F^*) = \frac{a + 2k_L + k_F}{4}$$

verkauft. Die Profite der Unternehmen sind demzufolge

$$\Pi_L^* = \frac{a - 2k_L + k_F}{4} y_L^* \quad \text{bzw.} \quad \Pi_F^* = \frac{a + 2k_L - 3k_F}{4} y_F^*.$$

Der interessierte Leser möge diese Profite ausrechnen und sich davon überzeugen, dass in diesem Modell der Marktführer einen höheren Gewinn erzielt, als im Cournotmodell und der Folger einen niedrigeren. Der faule interessierte Leser, möge sich davon wenigstens an Hand von Zahlenbeispielen überzeugen. Der Follower hat die Möglichkeit seine Strategie von der Antwortfunktion unabhängig zu wählen. Wenn er seine Menge erhöht, so senkt er damit den Marktpreis, womit er nicht nur sich selbst schadet, sondern auch dem Marktführer. Unter Umständen, kann er seine Strategie so

wählen, dass der Profit des Leaders kleiner wird als im Cournotwettbewerb. Das gibt dem Follower die Möglichkeit dem Marktführer vorher zu drohen, dass, wenn er nicht die Cournotstrategie wählt, der Follower vom Gleichgewicht abweichen und dem Marktführer dabei maximalen Schaden zufügen würde. Der Leader könnte jedoch annehmen, dass es sich dabei um einen Bluff handelt, da der Follower selbst Einbußen erleidet.

## 4 Das Modell von Bertrand

Das Modell mit der Quantität als strategische Größe überzeugte Joseph Bertrand nicht. Er hielt es für unrealistisch, dass sich der Preis tatsächlich einpendeln würde, sodass er im Jahr 1883 ein neues Modell präsentierte, dessen Idee darin bestand, den Preis als strategisches Mittel anzunehmen. Die Unternehmen legen einen Preis fest, anschließend bestimmt der Markt die herzustellende Menge. Wir müssen wieder vereinfachende Annahmen treffen. Zum einen nehmen wir an, dass für die Käufer keine anderen Faktoren eine Rolle spielen außer dem Preis. Sie kaufen das billigste Produkt. Werbung, Qualität u. a. werden vernachlässigt. Zum anderen nehmen wir an, dass jedes Unternehmen eine beliebige Nachfrage befriedigen kann. Wir beschränken uns außerdem wieder auf zwei Unternehmen.

Wir bezeichnen mit  $p_1$  und  $p_2$  die festgelegten Preise der Unternehmen. Wir gehen nun außerdem von gleicher Technologie für beide aus, mit linearer Abhängigkeit, d. h.  $C_1 = ky_1$ ,  $C_2 = ky_2$ ,  $k > 0$ . Die Quantitäten hängen von den Preisen ab:  $y_1 = y_1(p_1, p_2)$ ,  $y_2 = y_2(p_1, p_2)$ . Die Profite sind dann

$$\Pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - k)y_1(p_1, p_2), \quad \Pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - k)y_2(p_1, p_2).$$

Die Idee des Modells ist nun die, dass die Kunden ausschließlich bei dem Anbieter, dessen Preis niedriger ist, kaufen. Das Unternehmen mit dem niedrigeren Preis bedient also die komplette Nachfrage, während der Konkurrent nichts verkauft. Bieten beide das Produkt zum gleichen Preis, so teilt sich die Nachfrage zwischen beiden zu gleichen Anteilen auf. Wir betrachten nun vorerst einen Markt mit einem Monopolisten. Dessen Preis, Menge und Profit seien mit  $p$ ,  $y = y(p)$  und  $\Pi$  bezeichnet. Sei  $p_m$  der Preis, der den Profit des Monopolisten maximiert. Man beachte, der Monopolist kann den Preis diktieren, er bestimmt ihn, wobei er nur darauf achtet, dass der Profit maximal ist, d. h.

$$\Pi_m = (p_m - k)y(p_m)$$

soll maximiert werden. Die Lösung dieses Problems ist leicht, einfach nach dem Preis ableiten, null setzen und nach dem Preis umstellen. Nun wenden

wir uns wieder dem Problem mit zwei Unternehmen zu. Die Funktionen der Mengen können dann folgendermaßen bestimmt werden.

$$y_1(p_1, p_2) = \begin{cases} y(p_1) & \text{falls } p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}y(p) & \text{falls } p = p_1 = p_2 \\ 0 & \text{falls } p_1 > p_2. \end{cases}$$

Man kann davon ausgehen, dass  $0 \leq p_1 \leq p_m$  sein wird. Das ist logisch, denn mit einem Konkurrenten ist der Preis selbstverständlich niedriger als in einem Monopol. Entsprechend kann man die Menge für das zweite Unternehmen formulieren. Die Lösung des Problems ist, dass es genau ein Nash-Bertrand-Gleichgewicht gibt, und zwar, wenn  $p_1 = p_2 = k$ . Die Unternehmen sind also gezwungen zum Produktionspreis zu verkaufen, um wenigstens keine Verluste zu machen. Die Profite sind also null. Um zu verstehen, warum das so ist, überlegen wir welche Möglichkeiten man als Unternehmen hat. Der Preis wird nicht unter den Produktionskosten liegen, sonst macht das Unternehmen Verlust. Wählt ein Unternehmen nun einen Preis, der höher ist als der Preis des Konkurrenten, so verkauft es nichts und muss den Preis senken. Bieten beide Unternehmen ihr Produkt zum gleichen Preis an, der höher ist als die Produktionskosten, so teilen sie den Markt auf. Jedes Unternehmen ist bestrebt, den Preis zu senken, um dem Konkurrenten Marktanteile wegzunehmen. Das heißt, alles andere als  $p_1 = p_2 = k$  ist kein Gleichgewicht. Bleibt zu zeigen, dass es sich bei  $p_1 = p_2 = k$  um ein Gleichgewicht handelt. Das ist aber leicht, denn keiner der Konkurrenten hat den Drang den Preis zu senken, da dann Verluste drohen und keiner würde den Preis erhöhen, da damit Marktanteile verloren gehen. Man merkt also, dass es sich dabei wieder um ein Dilemma handelt, denn die Lösung ist schlecht für beide.

Falls die Produktionskosten unterschiedlich sind, so ist die Lösung für denjenigen mit den niedrigeren Kosten, den Preis knapp unter den Produktionskosten des anderen anzusetzen oder falls das Ergebnis für ihn im Monopol niedriger ist, dann den Preis des Monopols zu wählen. Das Unternehmen mit den höheren Kosten kann nicht gleichziehen und das erste beherrscht den Markt.

## 5 Gemeinsames Gut

Anschließend möchten wir noch ein soziales Dilemma betrachten. Dabei geht es darum, dass in einer Gemeinschaft jedem Mitglied eine bestimmte Menge eines Guts zur Verfügung steht. Dabei kann es sich um Geld, Land, Zeit uvm. handeln. Jeder kann einen Teil seines Guts an die Allgemeinheit abtreten. Davon würden alle profitieren. Jedoch weiß jeder, dass sein Beitrag

für die Allgemeinheit vernachlässigbar gering ist im Vergleich zum gesamten gemeinsamen Gut, sodass er denken könnte, dass er nichts spenden muss. Wenn jedoch alle so denken, so ist das gemeinsame Gut leer. Das Problem aber ist, dass gleichzeitig jeder bestrebt ist von dem gemeinsamen Gut zu profitieren. Ein konkretes Beispiel wäre dass in einer Stadt die Einwohner einen Park einrichten möchten. Jeder kann etwas von seinem privaten Land stiften. Je mehr gestiftet wird, desto besser wird der Park, umso mehr Erholungsanlagen entstehen. Wenn man aber sein eigenes Land der Allgemeinheit überlässt, dann verliert man privates Land, das einem ebenfalls Freude und Erholung bringt. Nehmen wir an, dass sich die Erholung eines Einwohners  $i$  mit

$$E_i = P^a x_i^b, \quad a, b \in [0, 1]$$

berechnen lässt, dabei habe der Ort  $N$  Einwohner,  $P$  sei die Parkfläche und  $x_i = k(s_0 - c_i)$  die Erholung, die man im eigenen Garten erlebt. Jeder hat außerdem den gleichen Garten der Fläche  $s_0$  und  $c_i$  ist die Fläche davon, die Einwohner  $i$  für den Park aufgibt. Also

$$P = c_1 + \dots + c_N.$$

Die Aufgabe des Lesers ist das Nash-Gleichgewicht dieses Problems zu finden. Man beachte, die strategische Größe ist  $c_i$ . Zum Vergleich, es kommt

$$c_i = \frac{a s_0}{a + N b}$$

heraus.

*Noch ein kleiner Nachtrag zum ersten Teil: Auf der Homepage [2] von R. Savani kann man die Gleichgewichtspunkte von Bimatrixspielen berechnen lassen. Wir danken Herrn Althöfer für den Hinweis.*

## Literatur

- [1] Lev Markhasin: *Spieltheorie – Eine Einführung*.  $\sqrt{\text{WURZEL}}$  Heft 1/2010.
- [2] Rahul Savani: *Solve a Bimatrix Game*. <http://banach.lse.ac.uk/form.html>