

# Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$

Zeitschrift für Mathematik

## LESEPROBE (AUSGABE 2002)

Editorial .....	2
Rechnen wird immer komplizierter .....	3
Optimale Strategien für Mastermind .....	4
Buchbesprechung: Fehler-Beschwörer .....	12
Carl Friedrich Gauß und das Siebenzehneck – Teil I .....	14
Mechanische Beweise .....	25
Berührende Kreise und Kugeln .....	27
Immer Ärger mit den Dreiecken .....	35
SoMaLa .....	41
Lösungsbedingungen & Hinweise für Autoren .....	44
Aufgaben .....	46
Impressum .....	48

Besuchen Sie uns doch mal  
[www.wurzel.org](http://www.wurzel.org)

35 Jahre Die  $\sqrt{\text{WURZEL}}$



## Editorial

### Liebe Leserin, Lieber Leser,

Herausgeber der  $\sqrt{\text{WURZEL}}$  ist eine Gruppe von Mathematikstudenten und Mitarbeitern der Friedrich-Schiller-Universität Jena, die sich zusammengefunden hat, um andere mit ihrer Begeisterung für die Mathematik anzustecken. Neben unserer Schülerakademie Mathematik ist die Zeitschrift eine Gelegenheit, an besonders begabte und mathematisch interessierte Schüler heranzutreten und ihnen etwas mehr Mathematik als in der Schule zu bieten. Leser sind nicht nur Schüler der gymnasialen Oberstufe, sondern auch Lehrer, Studenten und andere Mathematikinteressierte in Deutschland und auch im Ausland.

### Die Leseprobe der $\sqrt{\text{WURZEL}}$ (Ausgabe 2002)

Sie ist eine kleine Auswahl von Artikeln des Jahrgangs 2002 und ist fast wie ein ganz normales  $\sqrt{\text{WURZEL}}$ -Heft aufgemacht, so wie es monatlich erscheint. Da diese Ausgabe ausschließlich als elektronisches Dokument im Internet verfügbar ist, wurde sie für das Lesen am Bildschirm optimiert. Insbesondere hat die Leseprobe statt des üblichen DIN-A5-Hochformats ein bildschirmfreundlicheres Querformat.

Wir wollen Ihnen mit dieser Ausgabe die Möglichkeit geben, die  $\sqrt{\text{WURZEL}}$  kennenzulernen bevor Sie sich eventuell für ein Abonnement entscheiden. Der Versand von kostenlosen Probeheften ist leider nicht möglich, da dieser Service mit Aufwand und nicht unerheblichen Kosten verbunden ist. Wir hoffen, auch Ihnen mit diesem Angebot entgegenzukommen und laden Sie ein, von den anderen online gebotenen Möglichkeiten gebrauch zu machen: Buchbesprechungen aus der  $\sqrt{\text{WURZEL}}$ , Inhaltsverzeichnisse, die Werkstatt Mathematik und natürlich einem Bestellservice.

Wir wünschen Ihnen **viel Freude beim Lesen** und hoffen, Sie demnächst in unserer Leserschaft begrüßen zu dürfen.

*Ihre  $\sqrt{\text{WURZEL}}$ -Redaktion*

Weitere Informationen siehe [Impressum](#) auf der letzten Seite.

## Rechnen wird immer komplizierter

Wie das Akrützel bereits 1997 feststellte [1], wird Rechnen immer komplizierter. So reicht es zum Beispiel nicht mehr, einfach die letzte Null wegzustreichen oder das Komma um eine Stelle nach links zu setzen, wenn man ein Zehntel oder 10 Prozent ausrechnen will. Standortstandard ist die Zerlegung des Divisors in Primfaktoren:

### Sicherheitsabstand

Auch Dränglern geht es an den Kragen. Nach der komplizierten Regel „weniger als ein Fünftel des halben Tachowertes“. Beispiel: Wer bei Tempo 100 bis auf 10 m an den Vordermann heranfährt, gibt den Schein für einen Monat ab.

Dank der Euro-Einführung bleiben wir in Zukunft wenigstens in Reiseführern von Rechenregeln der folgenden Art (aus [2]) verschont:

Die Faustregel für Italien: Mark-Betrag mal 10, plus zwei Nullen (1 Mark = etwa 1000 Lire).

### Literatur

[1] Studentenrat der FSU Jena (Hrsg.): *Akrützel – Jenas führende Hochschulzeitung*. **109** (1997), 24.

[2] *Marco Polo Südtirol*. 5. Auflage 1996, Mairs Geographischer Verlag, Ostfildern.

*René Zimmermann, Jena  
(Erschienen in Heft 02/02)*

## Optimale Strategien für Mastermind

Dieser Artikel ist als Fortsetzung von [1] angedacht. Dort ging es um das Spiel „Minilogi“, welches auch unter „Mastermind“ bekannt ist. Ich möchte kurz ein paar Ideen darstellen, wie man die angegebenen Lösungsstrategien verbessern kann und mit Zuhilfenahme eines Computers auch eine „optimale Strategie“ finden kann.

Obwohl sich die meisten Überlegungen leicht verallgemeinern lassen, soll auch hier nur der Spezialfall betrachtet werden, wo ein Satz von vier **verschiedenen** Elementen bestimmt werden muss. Diese Elemente stammen jeweils aus einer Menge von 6 möglichen Farben, die wir mit den Zahlen 1 bis 6 repräsentieren. Insgesamt gibt es damit 360 Möglichkeiten.

Erklärtes Ziel ist es, die richtige Lösung möglichst schnell zu finden. Konkret geht es uns um einen **möglichst kleinen Erwartungswert für die Zahl der benötigten Züge**. Dazu kann man beispielsweise den Lösungsalgorithmus auf alle 360 möglichen Kombinationen loslassen und die Gesamtzahl der benötigten Schritte auswerten.

Da wir im Spiel die Zahl der verbleibenden Möglichkeiten möglichst schnell bis zur Lösung einschränken wollen, sollte auch jede einzelne Abfrage die Möglichkeiten im hohem Maße einschränken. Auch wenn die optimale Strategie vielleicht Abfragen enthält, die nicht maximal differenzieren, wollen wir zunächst dieses Extremalprinzip verfolgen. Wir wollen also die Abfrage immer so wählen, dass der Erwartungswert der Anzahl der verbleibenden Möglichkeiten minimal ist.

Wir vereinbaren einige Bezeichnungen.  $\mathcal{A}$  sei die Menge aller 360 Möglichkeiten und  $\mathcal{B}$  die Menge der 11 möglichen Bewertungen. Weiterhin verwenden wir die Funktion *Bewertung*(*Lösung*, *Test*), die einer Kombination *Test*  $\in \mathcal{A}$  die zur *Lösung*  $\in \mathcal{A}$  gehörige Bewertung aus  $\mathcal{B}$  zuordnet.

Sei zu einem Zeitpunkt während des Spiels  $M$  die Menge der noch möglichen Lösungskombinationen. Man überlegt sich schnell, dass  $M$  alle Informationen der bisherigen Abfragen enthält. Weiterhin sind alle Elemente von  $M$  gleich wahrscheinlich.

Für jede mögliche Abfrage können wir den Erwartungswert der Anzahl der verbleibenden Möglichkeiten bestimmen. Für jede dieser Abfragen  $z \in \mathcal{A}$  zerfällt  $M$  nämlich in offenbar disjunkte Mengen

$$M_b(z) = \{x \in M \mid \text{Bewertung}(x, z) = b\},$$

wobei  $b$  alle Bewertungen aus  $\mathcal{B}$  durchläuft.  $M_b(z)$  sind dann genau die verbleibenden Möglichkeiten, falls unsere Abfrage  $z$  mit  $b$  bewertet wird. Wegen der Gleichwahrscheinlichkeit aller Kombinationen aus  $M$  ist die Wahrscheinlichkeit die Bewertung  $b$  zu erhalten gleich der Zahl der Elemente von  $M_b(z)$  bezogen auf  $M$ , also  $p(z, b) = \frac{|M_b(z)|}{|M|}$ . Der Erwartungswert der Anzahl der verbleibenden Möglichkeiten ist damit

$$EW(z, M) = \sum_{b \in \mathcal{B}} p(z, b) \cdot |M_b(z)| = \frac{1}{|M|} \cdot \sum_{b \in \mathcal{B}} |M_b(z)|^2. \quad (1)$$

Nun wählen wir einen solchen Zug  $z$ , so dass dieser Wert<sup>1</sup> minimal wird. Er ist i. a. natürlich nicht eindeutig bestimmt. Wir setzen nun  $M \leftarrow M_b(z)$  und wiederholen das Verfahren solange, bis eine unserer Abfragen als korrekt bewertet wird. Dieses iterative Verfahren ist recht einfach und wenig rechenintensiv, da es nur einen Schritt vorausschaut. Wie wir noch sehen werden, ist es aber noch nicht optimal.

Zunächst wollen wir uns die Ergebnisse anschauen, wenn man für  $z$  nur die Möglichkeiten aus  $M$  zulässt, also keine Abfragen macht, die definitiv falsch sind. Den anderen Fall betrachten wir später, denn dabei gibt es noch eine Kleinigkeit zu beachten. Ich habe den oben vorgestellten Algorithmus programmiert.<sup>2</sup> Das Programm wurde nun auf jede der 360 Kombinationen angesetzt, wobei jeweils die Schritte bis zur Lösung gezählt wurden. Man kommt insgesamt auf **1461** Schritte, also  $1461/360 \approx 4.0583$  Schritte je Spiel – das ist schon besser als der in [1] gefundene Wert von 1470.

Nun wollen wir uns aber auch des Tricks bedienen, Abfragen außerhalb von  $M$  zuzulassen. Diese Züge haben durchaus das Potenzial besser zu differenzieren, sie können aber nicht zufällig zur richtigen Lösung führen. Haben wir beispielsweise noch zwei Möglichkeiten, würden wir eine der beiden tippen und mit 50% Wahrscheinlichkeit richtig liegen und sonst im zweiten Tipp die richtige Lösung legen. Der Erwartungswert beträgt also 1.5 Züge. Fatal wäre dagegen ein falscher Zug. Selbst wenn er die Lösung offenbart, also in (1) zum gleichen Wert führt, brauchen wir in jedem Fall 2 Züge.

<sup>1</sup>Bei der Umsetzung kann man den Vorfaktor  $\frac{1}{|M|}$  einfach weglassen, so dass man dann mit ganzen Zahlen auskommt.

<sup>2</sup>Um die Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, wurde im Falle mehrerer „bester“ Züge stets der mit der kleinsten Zifferndarstellung gewählt.

Die Ursache des Problems ist schnell erkannt: Wir haben nicht beachtet, dass im Falle der richtigen Abfrage ( $b = „4s“$ , 4 mal schwarz) das Spiel zu Ende ist und damit die Zahl der verbleibenden Möglichkeiten Null ist. Vorhin war das aber egal, da  $|M_{4s}| = 1$  unabhängig vom Zug galt, d. h. die Bewertungsfunktion nur um eine Konstante verfälscht wurde. (1) lautet nun

$$EW(z, M) = \frac{1}{|M|} \cdot \sum_{b \in \mathcal{B} \setminus \{4s\}} |M_b(z)|^2. \quad (2)$$

Dadurch werden die Züge aus  $M$  – wie gefordert – etwas besser bewertet. Die Gesamtschrittzahl verbessert sich jetzt auf **1459**. Zwar ist die Verbesserung relativ gering, aber immerhin vorhanden.

Nun wollen wir aber einen Schritt weiter gehen und „optimale“ Strategien finden. Dazu stellen wir eine Rekursionsformel auf, mit der wir den Erwartungswert einer Stellung auf die Erwartungswerte aller möglichen Folgestellungen zurückführen:

$$EW(M) = \begin{cases} 1 & \text{für } |M| = 1 \\ 1 + \min_{z \in \mathcal{A}_M} \sum_{b \in \mathcal{B}'} p(M, z, b) \cdot EW(M_b(z)) & \text{für } |M| > 1 \end{cases} \quad (3)$$

wobei

$$M_b(z) = \{x \in M \mid \text{Bewertung}(x, z) = b\}, \quad (4)$$

$$p(M, z, b) = \frac{|M_b(z)|}{|M|},$$

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{4s\},$$

$$\mathcal{A}_M = \{z \in \mathcal{A} \mid \forall b \in \mathcal{B} : M_b(z) \neq M\}.$$

Die Größen  $M_b(z)$ ,  $p(M, z, b)$ ,  $\mathcal{B}'$  sind wie bisher definiert und verwendet worden. Lediglich  $\mathcal{A}_M$  ist noch zu kommentieren. Eigentlich müsste man über alle Abfragemöglichkeiten aus  $\mathcal{A}$  minimieren. Aber unter diesen gibt es solche, deren Bewertung schon feststeht. In diesen Fällen gibt es also genau ein  $b \in \mathcal{B}$  mit  $M_b(z) = M$ . Eine solche Abfrage ist natürlich unsinnig.  $\mathcal{A}_M$  schließt genau diese Fälle aus und gewährleistet damit außerdem, dass die Menge der Möglichkeiten mit jedem Rekursionsschritt abnimmt, denn  $|M_b(z)| < |M|$  für alle  $b \in \mathcal{B}$ .

Die Rekursion ist also endlich, wir können im Prinzip die gesuchte Zahl  $EW(\mathcal{A})$  bestimmen. Jedoch läuft die Rekursion in jedem Schritt über knapp 360 Elemente aus  $\mathcal{A}_M$  und 10 Bewertungen aus  $\mathcal{B}'$ , was bei Rekursionstiefe 5 (in ungünstigen Fällen wahrscheinlich erheblich mehr) etwa  $3600^5 \approx 10^{18}$  Rechenschritte bedeutet – selbst bei  $10^9$  Schritten je Sekunde sind das noch 20 Jahre Rechenzeit!<sup>3</sup>

Wir müssen also noch etwas optimieren. O. B. d. A. können wir bei ersten Mal 1234 tippen. Den zweiten Schritt kann man auch stark einschränken, denn tauscht man eine Farbe gegenüber dem ersten aus, so kann man o. B. d. A. die 4 durch 5 ersetzen, wobei man natürlich alle nichtäquivalenten Permutationen von 1235 betrachten muss. Man kann sich beispielsweise auf die 15 Kombinationen 1243, 1342, 2143, 2413, 1235, 1325, 1253, 2153, 1352, 3152, 1256, 2156, 1526, 2516 und 5612 beschränken. Alle anderen kann man durch geeignete Umbenennung darauf zurückführen.

Bei kleinen Mengen  $M$  kann man durchaus  $\mathcal{A}_M = M$  fordern. Hat man beispielsweise unter der Einschränkung  $\mathcal{A}_M = M$  schon  $EW(M) \leq 2$  gefunden, so ist dies die optimale Lösung, denn bei einem falschen Tipp würde man auf jeden Fall mindestens zwei Schritte brauchen. Ebenso ist es sinnvoll bei der Summation in (3) mit den großen Mengen  $M_b(z)$  zu beginnen und die Summation abzurechnen, falls das bisher aktuelle Minimum überschritten wurde. Insbesondere sollte man dabei zuerst mit den  $z$  aus  $M$  beginnen.

Wenn man mit all diesen Optimierungen sowie einigen weiteren kleinen Verbesserungen (z. B.  $EW(M) = 1.5$  für  $|M| = 2$ ) arbeitet, lässt sich die Rekursion erfolgreich auf dem Computer umsetzen. In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten

<sup>3</sup>Würden wir keine falschen Züge zulassen, also mit  $\mathcal{A}_M = M$  arbeiten, so kommt das Verfahren rasch zum Ergebnis, da die Verzweigungsvielfalt mit zunehmender Rekursionstiefe rasch abnimmt. Es ergibt sich ein Erwartungswert von  $1453/360 \approx 4.0361$  – eine deutliche Verbesserung, aber sicher noch nicht das Optimum.

Ergebnisse festgehalten.

Bewertung	$ M $	2. Tipp	$1 + EW(M)$	Summenwert
A ○○●●	84	2516	4.2500000	357
B ●○●●	48	1526	3.9166667	188
C ●●●●	12	1526 !	3.3333333	40
D ○○○●	88	3152	4.1704545	367
E ●○○●	72	1253	4.1250000	297
F ●●○●	24	1253	3.6250000	87
G ●●●●	8	1253 !	3.2500000	26
H ○○○○	9	2413	3.5555556	32
I ●○○○	8	1325 !	3.7500000	30
K ●●○○	6	1243	3.5000000	21
L ●●●●	1	1234	1.0000000	1

Die erste Spalte gibt die Bewertung (Buchstaben wie in [1]) des ersten Tipps (1234) an. Daneben steht die Zahl der verbleibenden Möglichkeiten. In der dritten Spalte ist ein optimaler 2. Tipp angegeben. Ein Ausrufezeichen markiert, wenn dieser nicht aus  $M$  ist. In der nächsten Spalte steht der Erwartungswert um das Spiel vollständig zu lösen, wobei der erste Schritt schon mitgezählt ist.

Der Summenwert ist dann einfach  $|M| \cdot (1 + EW(M))$  und dient zum Vergleich mit den Werten aus [1, Tabelle auf S. 36]. Insgesamt ergibt sich eine Gesamtsumme von **1446**, was einem Erwartungswert von  $1446/360 \approx 4.0167$  Schritten je Spiel entspricht.

Interessanterweise ist beim zweiten Versuch nur dreimal ein „falscher“ Tipp optimal, insbesondere sind dies Fälle mit wenigen verbleibenden Möglichkeiten nach dem ersten Tipp. Es ist weiterhin festzustellen, dass ansonsten immer eine Abfrage aus der Menge  $M$  der noch verbleibenden Möglichkeiten optimal ist.

In der Tabelle auf der folgenden Seite ist die komplette Strategie aufgelistet. Für jeden Schritt steht in der linken Spalte eine optimale Abfrage und daneben die möglichen Bewertungen sowie (informationshalber) noch die Zahl der verbleibenden Möglichkeiten. Jedoch wurden alle Fälle mit weniger als 3 verbleibenden Möglichkeiten weggelassen, da die weitere Strategie dann völlig klar ist. Ansonsten würde die Tabelle mehrere Seiten füllen (nämlich 360 Zeilen)!

## **Literatur**

[1] Dr. Carsten Müller: *Altes Spiel – anders betrachtet*.  $\sqrt{\text{WURZEL}}$  Heft 2/2002.

*Thomas Fischer, Jena  
(Erschienen in Heft 03+04/02)*

1. Schritt		2. Schritt		3. Schritt		4. Schritt			
1234	○○· 84	2516	○○· 8	3465	●●○○ 3	3645			
			●○· 5	3456					
			○○○ 24	3651	●○· 3	4625			
					○○○ 4	5362			
					●○○ 3	5461			
					●●○ 3	3625			
					●○○○ 3	5361			
				●○○ 21	6541	○○· 3	2653		
			○○○ 5			3156			
			●○○ 3			2645			
		●●○ 8	2356						
		●●● 3	2546						
		○○○○ 4	5162						
		●○○○ 5	2165						
		●●○○ 4	2156						
	●○· 48	1526	○○· 5	3654					
○○○ 13			3265						
●○○ 13			5246	○○· 3	1365				
				○○○ 3	1465				
●●○ 5			1356						
○○○○ 3			5261						
●●· 12	1526	○○○ 3	5264						
		●○○ 3	1635						
○○○ 88	3152	○○· 16	2463	○○○ 3	4316				
				●○○ 4	4613				
		●○· 12	3416	●○○ 3	2146				
		●●· 5	3462						
		○○○ 17	2543	●○○ 4	2415				
		●○○ 16	2145	●○○ 5	2453				

1. Schritt		2. Schritt		3. Schritt		4. Schritt	
			●●○ · 8	3542			
			●●● · 3	3452			
			○○○○ 3	2315			
			●○○○ 4	2351			
			●●○○ 3	2153			
●○○ · 72	1253	○○ · 15	2364	○○○ · 3	4136		
				●●○ · 3	2614		
		●○ · 8	1426				
		●● · 4	1463				
		○○○ · 15	4532	●○○ · 3	2514		
		●○○ · 13	1425				
		●●○ · 6	1452				
		○○○○ 3	2531				
		●●○○ 4	1352				
●●○ · 24	1253	●○ · 6	1364				
		●○○ · 6	1435				
		●●○ · 3	1354				
●●● · 8	1253						
○○○○ 9	2413	●○○○ 4	2341				
●○○○ 8	1325	○○○ · 4	2431				
●●○○ 6	1243	●○○○ 4	1324				

## Buchbesprechung: Fehler-Beschwörer

Das Buch *Fehler-Beschwörer – Typische Fehler beim Lösen von Mathematikaufgaben* enthält einen neuen, interessanten Ansatz für den Mathematikunterricht. In den meisten Lehrbüchern werden zu gestellten Aufgaben fehlerfreie Lösungen präsentiert. Nicht so im vorliegenden Buch. Es behandelt Probleme aus den verschiedensten Bereichen der Mathematik. Dabei werden zu jedem Problem mehrere einsichtige Lösungen vorgestellt. Allerdings erkennt man immer sofort, dass sich diese Lösungen widersprechen. Hier stellt sich nun für den Leser der Reiz, die vorgestellten Lösungen genau zu analysieren sowie Gedankengang und Rechenweg auf Fehler zu untersuchen. Durch diese intensive Arbeit werden viele Aspekte vertieft – selbst dann, wenn der Fehler selbst nur teils oder gar nicht gefunden wird. Der Prozess trägt also auf jeden Fall zum besseren Verständnis bei.

Im ersten Kapitel werden die eben erwähnten Probleme und die (Schein-) Lösungen dargelegt. Im Anschluss werden im zweiten Kapitel die Fehler aus dem ersten Kapitel genau analysiert und weitere ergänzende Beispiele sowie eine korrekte Lösung für das jeweilige Problem angegeben. Das letzte Kapitel entspricht in seinem Aufbau dem ersten Kapitel. Allerdings werden dem Leser hier keine weiteren Hinweise zu den vorgestellten Widersprüchen gegeben.

Das Buch liefert eine Fülle von Material, um Schülern im Mathematikunterricht zu selbstständiger Arbeit anzuregen.

In gekürzter Fassung folgt eines der Beispiele aus dem Buch:

*Ein Zauberer legt eine Münze in eine Kiste. Nach einer halben Stunde nimmt er die Münze heraus und legt dafür eine 2., 3. und eine 4. Münze hinein. Nach einer weiteren viertel Stunde nimmt er wieder eine Münze (die zweite) heraus und legt abermals drei neue Münzen hinein. Nach einer weiteren achtel Stunde nimmt er wieder eine Münze (die dritte) heraus und legt wieder drei Münzen hinein. Und so weiter.*

Die Frage: Wie viele Münzen sind nach einer Stunde in der Kiste?

*1. Lösungsweg:* Bei jedem Schritt wird eine Münze entfernt und drei neue kommen hinzu. Also kommen bei jedem Schritt zwei Münzen hinzu. Somit sind nach  $n$  Schritten  $2n + 1$  Münzen in der Kiste. Da der Zauberer nach einer Stunde unendlich viele Schritte ausgeführt hat, sind unendlich viele Münzen in der Kiste.

2. *Lösungsweg*: Welche Münze kann letztendlich in der Kiste sein? Jede Münze in der Kiste muss irgendwann in die Kiste gekommen sein und hat somit eine Nummer. (Im zweiten Schritt kommen zum Beispiel die Münzen 5, 6 und 7 hinzu.) Sei  $n$  die Nummer einer Münze in der Kiste. Dann wird sie aber im  $n$ -ten Schritt wieder aus der Kiste genommen und kommt nicht wieder hinein! D. h. also jede Münze, die in die Kiste kommt, wird irgendwann auch wieder herausgenommen. Somit ist nach einer Stunde keine Münze mehr in der Kiste.

Widerspruch! Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?

André Große  
(Erschienen in Heft 02/02)

### Kurzinfo



Attila Furdek:

*Fehler-Beschwörer – Typische Fehler beim Lösen von Mathematikaufgaben.*

Books on Demand · Norderstedt 2001;

302 Seiten; ISBN 3-8311-2110-9; € 19,95

Wie alle unserer besprochenen Bücher kann auch dieses Buch online über unsere Website [www.wurzel.org](http://www.wurzel.org) bestellt werden.

## Carl Friedrich Gauß und das Siebenzehneck – Teil I

Archimedes war bereits 137 Jahre<sup>1</sup> tot, als der Römer Cicero, damals Quästor von Sizilien, dessen verfallenes Grabmal in Syrakus anhand einer geometrischen Figur ausfindig machen konnte. Der bedeutendste Mathematiker der Antike war nämlich besonders stolz auf seine Beiträge zur Stereometrie, und also wünschte er die Darstellung eines eine Kugel eng umschließenden Zylinders, für deren Rauminhalte er das Verhältnis 3:2 bestimmen konnte, eingemeißelt auf dem Grabstein.

Wie weiland Archimedes, so äußerte auch Carl Friedrich Gauß (1777–1855), der princeps mathematicorum<sup>2</sup>, den Wunsch, dass auf seinem Grabstein die Figur des regulären Siebenzehnecks verewigt werde. Dem wurde zwar nicht entsprochen, aber die Statue des Gauß–Denkmals in Braunschweig soll wohl auf einer solchen stehen.

In dieser kleinen Schrift werden nun zwei Beweise für die Konstruierbarkeit dieses Polygons mit Zirkel und Lineal dargelegt, ohne dass dabei auf moderne und anspruchsvolle algebraische Begriffssysteme bzw. Theorien zurückgegriffen wird: einerseits die komplexe Kreisteilungsgleichung zum Ausgangspunkt nehmend, andererseits unter alleiniger Verwendung einfacher goniometrischer Beziehungen. Zur Abrundung werden drei Konstruktionsverfahren vorgeführt, und es werden ein paar biographische Bezüge hergestellt. Ziel ist es, einen elementaren Zugang für diese Thematik zu eröffnen und vielleicht Interesse am großen Mathematiker und Naturwissenschaftler Gauß zu wecken.

### 1 Reguläre Vielecke, konstruiert allein mit Zirkel und Lineal

„Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, dass verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich das Dreieck, Fünfeck, Fünfehnneck und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch construieren lassen. So weit war man schon zu *Euklids* Zeit, und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, dass das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.

---

<sup>1</sup>–75 – (–212) Jahre.

<sup>2</sup>Nach der Inschrift einer noch 1855 auf Gauß geprägten Gedenkmünze: Fürst der Mathematiker.

Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, dass *außer jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Construction fähig ist.* Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publicum vorgelegt werden.“

Diese oft zitierte Ankündigung<sup>3</sup> ist die erste Gaußsche Veröffentlichung. Bei einem Ferienaufenthalt in seiner Heimatstadt Braunschweig während der Morgenstunden des 30. März 1796<sup>4</sup> — „ehe ich aus dem Bette aufgestanden war“ — gelang dem noch nicht 19jährigen Göttinger Studenten jene großartige Entdeckung, nämlich, dass alle Vielecke konstruierbar sind, deren Seitenzahl  $p$  eine Primzahl von der Art

$$p = 2^{2^k} + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

eine so genannte *Fermatsche Primzahl*, ist. Für  $k = 2$  erhält man das 17eck. Und so entschied sich Gauß endgültig für die Mathematik — er wurde zu jener Zeit auch durch die klassische Philologie stark angezogen.

Die Fermatschen Primzahlen spielen in diesem Zusammenhang die entscheidende Rolle. Hier sei nur erwähnt, dass bis heute lediglich die Zahlen 3, 5, 17, 257 und 65537, die zu  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  gehören, als Primzahlen identifiziert sind und nicht entschieden ist, ob es überhaupt weitere gibt.

Es ist sofort zu sehen, dass aus der Konstruierbarkeit eines  $n$ -Ecks — auch  $n = 2$  („Zweieck“) sei zugelassen — die eines  $2n$ -Ecks,  $4n$ -Ecks usw. folgt. Die Menge der konstruierbaren Vielecke erweitert sich zudem noch durch Produktbildungen der Seitenzahlen gewisser gegebener Vielecke. Angenommen, sowohl das  $p_1$ -Eck als auch das  $p_2$ -Eck seien konstruierbar ( $p_1, p_2$  *ungleiche* Primzahlen<sup>5</sup> oder auch nur teilerfremd). Nach einem Satz der elementaren Zahlentheorie kann der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen als Linearkombination dieser Zahlen ausgedrückt werden. Es existieren also ganze  $z_1, z_2$ , mit denen

$$1 = ggT(p_1, p_2) = z_1 p_1 + z_2 p_2 \tag{1}$$

<sup>3</sup>Intelligenzblatt der allgemeinen Literaturzeitung, Rubrik Neue Entdeckungen, 1. Juni 1796.

<sup>4</sup>Auch der 29. März wurde zuweilen von Gauß angegeben.

<sup>5</sup> Vielecke, deren Seitenzahl eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist, wie beim Neuneck, sind nicht konstruierbar.

gilt. Diese Darstellung ist, nebenbei bemerkt, wegen

$$z_1 p_1 + z_2 p_2 = (z_1 + k p_2) p_1 + (z_2 - k p_1) p_2 \quad (k \text{ beliebig ganz})$$

nicht eindeutig. Eine Modifikation des bekannten *Euklidischen Algorithmus* liefert ein effektives Verfahren zur Bestimmung konkreter  $z_1$  und  $z_2$ , das auch als konstruktiver Beweis des erwähnten Satzes dienen kann und hier exemplarisch für  $p_1 = 257, p_2 = 17$  demonstriert wird:

$$\begin{array}{rclcl} 257 : 17 & = & 15 & \text{Rest } 2 & 2 & = & 257 - 15 \cdot 17 \\ 17 : 2 & = & 8 & \text{Rest } 1 & 1 & = & 17 - 8 \cdot 2 \\ 2 : 1 & = & 2 & & & = & 17 - 8 \cdot (257 - 15 \cdot 17) \\ & & & & & = & 121 \cdot 17 - 8 \cdot 257, \end{array}$$

damit ist  $ggT(257, 17) = 1 = -8 \cdot 257 + 121 \cdot 17$ .

Aus (1) lässt sich dann weiter eine Konstruktionsmöglichkeit des Zentriwinkels  $\frac{2\pi}{p_1 p_2}$  vom  $p_1 p_2$ -Eck durch Vervielfachen bzw. Antragen von gegebenen Zentriwinkeln ableiten, und zwar über

$$\frac{2\pi}{p_1 p_2} = z_1 \frac{2\pi}{p_2} + z_2 \frac{2\pi}{p_1} . \quad (2)$$

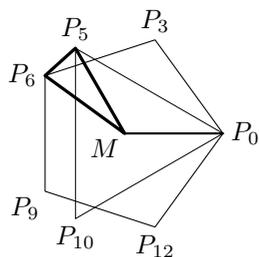


Abbildung 1: Konstruktion des 15ecks  
aus Dreieck und Fünfeck.

Abbildung 1 zeigt eine solche für das 15eck, basierend auf  $\frac{2\pi}{15} = 2 \cdot \frac{2\pi}{5} - 1 \cdot \frac{2\pi}{3}$ . Dabei sind  $\sphericalangle P_0MP_6 = 2 \cdot \frac{2\pi}{5}$  und  $\sphericalangle P_0MP_5 = \frac{2\pi}{3}$ , so dass  $\sphericalangle P_5MP_6$  der gesuchte Zentriwinkel des 15ecks ist.

Das Verfahren ist auf mehr als zwei Faktoren ausdehnbar. So findet man zu drei paarweise teilerfremden Zahlen  $p_1, p_2, p_3$  durch zweimalige Anwendung von (2)

$$\frac{2\pi}{(p_1p_2)p_3} = z'_1 \frac{2\pi}{p_3} + z'_2 \frac{2\pi}{p_1p_2} = z'_1 \frac{2\pi}{p_3} + z'_2 \left( z_1 \frac{2\pi}{p_2} + z_2 \frac{2\pi}{p_1} \right)$$

mit ganzen  $z_1, z_2$  und  $z'_1, z'_2$ .

Tabelle 1 gibt nun als Ergebnis dieser Vorgehensweise zu jedem möglichen Produkt, mit den bis dato bekannten Fermatschen Primzahlen gebildet, eine zugehörige Linearkombination an.

Anzahl Faktoren	Koeffizienten vor den Werten:					$n$ -Eck
	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{17}$	$\frac{2\pi}{257}$	$\frac{2\pi}{65537}$	
2	-1	2				15
	-1		6			51
	-1			86		771
	-1				21846	196611
		-2	7			85
		-2		103		1285
		-2			26215	327685
			-8	121		4369
			-8		30841	1114129
				-128	32641	16843009
3	1	-4	8			255
	1	-4		120		3855
	1	-4			30584	983055
	1		-14	126		13107
	1		-14		32126	3342387
	1			-214	32726	50529027
		-1	-5	127		21845
		-1	-5		32383	5570645
		-1		-77	32743	84215045
			-4	-68	32761	286331153
4	-1	3	-13	128		65535
	-1	3	-13		32640	16711935
	-1	3		-197	32760	252645135
	-1		10	-194	32766	858993459
		-3	6	-65	32767	1431655765
5	1	-1	2	-193	32768	4294967295

Tabelle 1: Linearkombinationen der Zentriwinkel.

## 2 Ein Beweis der Konstruierbarkeit des Siebenzehnecks, von der komplexen Kreisteilungsgleichung ausgehend

Das Versprechen in seiner ersten Veröffentlichung von 1796, dem „Publicum“ die zugehörige Theorie vorzulegen, löste Gauß mit seinem zahlentheoretischen Hauptwerk *Disquisitiones Arithmeticae*<sup>6</sup> ein. Im *Kapitel VII*, einem weitgehend in sich abgeschlossenen Teil, wird die Theorie der Kreisteilung entwickelt, aus der u. a. das „Corollarium“ folgt, dass alle regulären  $p$ -Ecke konstruierbar sind, falls  $p$  eine Primzahl der Form  $2^{2^k} + 1$  ist. Gauß weist außerdem darauf hin, dass es keine weiteren konstruierbaren  $p$ -Ecke gibt. Ein Beweis bleibt jedoch wegen Platzmangel aus. Allgemeine  $n$ -Ecke führt er auf  $p$ -Ecke, wobei  $p$  Primzahl ist, zurück.

In jenem Kapitel gibt Gauß auch beispielhaft zum Kosinus des Zentriwinkels des 17ecks eine Kette quadratischer Gleichungen an, deren Lösungen naheliegende Entsprechungen in geometrischen Konstruktionen haben. Jahrzehnte später fanden sich unverzagte Enthusiasten, die dieses gleicherweise für das 257eck (F. J. Richelot, 1832) und das 65537eck (J. Hermes, 1879) erledigten, wobei das Manuskript von Hermes, entstanden innerhalb von zehn Jahren, dem Mathematischen Institut der Universität Göttingen in einem Handkoffer übergeben wurde, wo es noch heute ruhen soll.

Auch gibt Gauß speziell zu  $\cos \frac{2\pi}{17}$  einen expliziten Quadratwurzelausdruck an. Eine Herleitung dazu, natürlich über die Kette quadratischer Gleichungen, wird nun folgen — im nächsten Abschnitt geschieht das ohne Verwendung komplexer Zahlen.

Die Lösungen der speziellen Kreisteilungsgleichung  $z^{17} - 1 = 0$  sind bekanntermaßen genau die 17ten komplexen Einheitswurzeln  $\varepsilon^k$  ( $k = 0, 1, \dots, 16$ ), wobei

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}$$

mit der imaginären Einheit  $i$  ist. Diese Wurzeln, als Punkte der Gaußschen Zahlenebene verstanden, liegen sämtlich auf dem Einheitskreis und teilen diesen in gleiche Bogenabschnitte, d. h. sie bilden die Ecken eines regelmäßigen 17ecks. Weiterhin

---

<sup>6</sup>Untersuchungen über höhere Arithmetik, Leipzig, im Sommer 1801.

hat man für ganze  $k$

$$\varepsilon^k = \cos \frac{2\pi k}{17} + i \sin \frac{2\pi k}{17} = \cos(k \pm 17) \frac{2\pi}{17} + i \sin(k \pm 17) \frac{2\pi}{17} = \varepsilon^{k \pm 17} \quad (3)$$

sowie

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{-k} = 2 \cos \frac{2\pi k}{17}. \quad (4)$$

Setzt man in

$$(z - 1)(z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1) = \sum_{j=1}^{17} z^j - \sum_{j=0}^{16} z^j = z^{17} - 1$$

die Einheitswurzel  $\varepsilon$  ein, so ist wegen  $\varepsilon^{17} - 1 = 0$ , (3) und  $\varepsilon - 1 \neq 0$  zwangsläufig

$$\sum_{j=1}^{16} \varepsilon^j + 1 = 0, \quad \text{also} \quad \sum_{j=1}^8 \varepsilon^j + \sum_{j=1}^8 \varepsilon^{-j} = -1. \quad (5)$$

Es erweist sich als ausgesprochen zweckmäßig, die Summe in (5) wie folgt aufzuspalten:

$$\eta + \eta_1 = -1, \quad (6)$$

und dabei ist jedes Glied des Summanden

$$\eta = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8}$$

gerade das Quadrat des vorangehenden bzw. das erste das Quadrat des letzten. Bei  $\eta_1$  ist das genauso:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7} \\ &= 2 \cos \frac{6\pi}{17} + 2 \cos \frac{12\pi}{17} + 2 \cos \frac{10\pi}{17} + 2 \cos \frac{14\pi}{17} \\ &= 2 \cos \frac{6\pi}{17} - 2 \cos \frac{5\pi}{17} - 2 \cos \frac{7\pi}{17} - 2 \cos \frac{3\pi}{17} < 0. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Zeilen ergeben sich aus (4) und den Beziehungen  $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$  sowie  $\cos \frac{6\pi}{17} - \cos \frac{5\pi}{17} < 0$  und  $\cos \frac{7\pi}{17} > 0, \cos \frac{3\pi}{17} > 0$ .

+	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
3	4	5	7	-6	2	1	-1	-5
6	7	8	-7	-3	5	4	2	-2
-5	-4	-3	-1	3	-6	-7	8	4
7	8	-8	-6	-2	6	5	3	-1
-3	-2	-1	1	5	-4	-5	-7	6
-6	-5	-4	-2	2	-7	-8	7	3
5	6	7	-8	-4	4	3	1	-3
-7	-6	-5	-3	1	-8	8	6	2

Tabelle 2: Additionsmatrix modulo 17 zum Produkt  $\eta\eta_1$ .

Das Produkt  $\eta\eta_1$  kann durch einfaches Ausmultiplizieren unter Berücksichtigung von (3) und (5) gefunden werden (Tabelle 2 enthält die entstehenden Exponentensummen modulo 17):

$$\eta\eta_1 = \sum_{j=1}^{16} 4\varepsilon^j = -4. \quad (7)$$

**Bemerkung.** Das mühsame Ausmultiplizieren kann bei Kenntnis des Kongruenzenkalküls mit Hilfe zahlentheoretischer Überlegungen umgangen werden. (*Auf Details dazu wurde verzichtet — d. Red.*)

Aus (6) und (7) folgt, dass die reellen  $\eta$  und  $\eta_1$  auch durch Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + x - 4 = 0$$

bestimmt werden können<sup>7</sup>. Man bekommt wegen  $\eta_1 < 0$  die Werte

$$\eta_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{und} \quad \eta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} > 0,$$

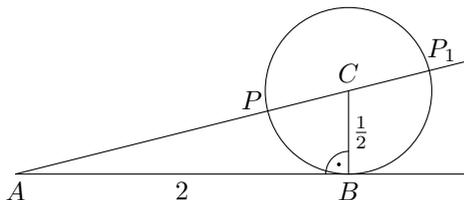


Abbildung 2: Zur Konstruktion von Wurzelwerten.

und diese lassen sich leicht als Streckenlängen konstruieren. In Abbildung 2 ist etwa  $\overline{AC} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ , also  $\overline{AP} = \eta$  und  $\overline{AP_1} = |\eta_1|$ . Die Summen  $\eta$  und  $\eta_1$  werden nun — per „Überspringen“ jeweils eines Gliedes — zerlegt in

$$\eta = z + z_1 \quad \text{bzw.} \quad \eta_1 = z_2 + z_3,$$

wobei

$$\begin{aligned} z &= \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} = 2 \cos \frac{2\pi}{17} + 2 \cos \frac{8\pi}{17} > 0, \\ z_1 &= \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} = 2 \cos \frac{4\pi}{17} - 2 \cos \frac{\pi}{17} < 0, \\ z_2 &= \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 = 2 \cos \frac{6\pi}{17} - 2 \cos \frac{7\pi}{17} > 0, \\ z_3 &= \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} = -2 \cos \frac{5\pi}{17} - 2 \cos \frac{3\pi}{17} < 0. \end{aligned}$$

gesetzt wurde. Durch Ausmultiplizieren überzeugt man sich leicht von

$$z z_1 = z_2 z_3 = \sum_{j=1}^{16} \varepsilon^j = -1,$$

<sup>7</sup>Satz von Vieta über die Lösungen  $x_1, x_2$  von  $x^2 + px + q = 0$ :  $-p = x_1 + x_2$ ,  $q = x_1 x_2$ .

und folglich können wieder  $z$ ,  $z_1$  und  $z_2$ ,  $z_3$  aus  $x^2 - \eta x - 1 = 0$  bzw.  $x^2 - \eta_1 x - 1 = 0$  bestimmt werden. Die zugehörigen Vorzeichen sind bekannt, also ist

$$\begin{aligned} z &= \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 + 4}}{2}, & z_1 &= \frac{\eta - \sqrt{\eta^2 + 4}}{2}, \\ z_2 &= \frac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + 4}}{2}, & z_3 &= \frac{\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2 + 4}}{2}. \end{aligned}$$

Auch diese Werte sind geometrisch konstruierbar, falls  $\eta$  bzw.  $\eta_1$  als Strecken bereits vorliegen. Schließlich wird, um  $\cos \frac{2\pi}{17}$  aus  $z$  zu isolieren,

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{17} \quad \text{und} \quad y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = 2 \cos \frac{8\pi}{17}$$

geschrieben. Damit gilt  $y > y_1 > 0$ ,  $z = y + y_1$  sowie  $yy_1 = \varepsilon^5 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = z_2$ , und die Wurzeln der damit verbundenen Gleichung  $x^2 - zx + z_2 = 0$  sind die konstruierbaren Größen

$$y = \frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - z_2} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{z}{2} - \sqrt{\frac{z^2}{4} - z_2}.$$

Ausgehend von  $y = 2 \cos \frac{2\pi}{17}$  ist man endlich in der Lage, durch Einsetzen der zugehörigen Wurzel­ausdrücke zuerst anstelle von  $z$  bzw.  $z_2$  und anschließend von  $\eta$  bzw.  $\eta_1$  die von C. F. Gauß angegebene Darstellung von  $\cos \frac{2\pi}{17}$  in Gestalt ineinandergeschachtelter Wurzel­ausdrücke herzuleiten:

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{17} &= \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}\sqrt{z^2 - 4z_2} \\ &= \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\sqrt{\eta^2 + 4} + \frac{1}{8}\sqrt{2\eta^2 + 4 + 2\eta\sqrt{\eta^2 + 4} - 8\eta_1 - 8\sqrt{\eta_1^2 + 4}} \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\quad + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \frac{\sqrt{17}-1}{2}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}, \end{aligned}$$

und durch Substitution von

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{17}-1}{2} \sqrt{34-2\sqrt{17}} &= \frac{\sqrt{17}+1}{2} \sqrt{34-2\sqrt{17}} - \sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4} (18+2\sqrt{17}) (34-2\sqrt{17})} - \sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
 &= 2\sqrt{34+2\sqrt{17}} - \sqrt{34-2\sqrt{17}}
 \end{aligned} \tag{8}$$

bekommt man daraus die berühmte Wurzelarstellung

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{2\pi}{17} &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{17} + \frac{1}{16} \sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
 &\quad + \frac{1}{8} \sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Aus dem Vorangehenden ist ersichtlich, dass auch die Vielfachen von  $\frac{2\pi}{17}$  ähnlich aufgebaute Ausdrücke der Kosinuswerte besitzen. So ist zum Beispiel der fünffache Zentriwinkel des Siebenzehnecks

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{10\pi}{17} &= -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \sqrt{17} + \frac{1}{16} \sqrt{34+2\sqrt{17}} \\
 &\quad - \frac{1}{8} \sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}}
 \end{aligned} \tag{10}$$

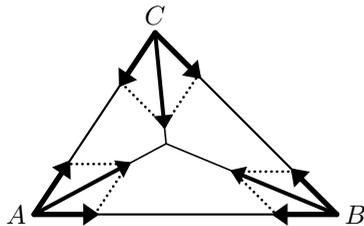
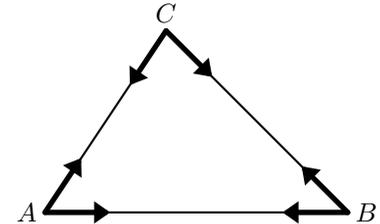
auf gleiche Weise herleitbar.

Jürgen Patzschke, Potsdam  
(Erschienen in Heft 05/02, fortgesetzt in Heft 06/02)

## Mechanische Beweise

Die Idee, geometrische Ergebnisse mit Argumenten aus der Mechanik zu beweisen, geht auf den griechischen Mathematiker, Erfinder und Ingenieur ARCHIMEDES (287–212 v. Chr.) zurück. Diese Idee aufgreifend, soll nun ein einfacher Beweis dafür vorgestellt werden, dass sich die Winkelhalbierenden eines Dreiecks in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

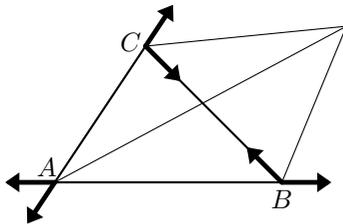
Sei  $ABC$  ein Dreieck. An den Ecken lassen wir jeweils eine Kraft in Richtung der benachbarten Ecken angreifen, siehe Skizze. Alle sechs Kräfte sollen den gleichen Betrag haben. Da jede dieser Kräfte durch eine andere Kraft derselben Stärke und entgegengesetzter Richtung ausgeglichen wird, befindet sich das Dreieck im Kräftegleichgewicht.<sup>1</sup>



Nun betrachten wir die zwei Kräfte an der Ecke  $A$ . Da sie den gleichen Betrag haben, ist ihre Resultierende eine Kraft, die in Richtung der Winkelhalbierenden zeigt. Analog bilden auch die Kräfte bei  $B$  und  $C$  eine Resultierende in Richtung der jeweiligen Winkelhalbierenden.

Wenn sich diese drei Resultierenden nicht in einem Punkt schneiden, würden sie ein Drehmoment auf Dreieck ausüben. Das wäre aber ein Widerspruch zum oben festgestellten Gleichgewicht des Dreiecks. Folglich müssen sich die drei Resultierenden und damit auch die Winkelhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Dieser Punkt heißt Inkreismittelpunkt.

<sup>1</sup> Vielleicht kann sich mancher Leser die Situation auch besser vorstellen, wenn alle Kräfte nach außen zeigen würden.

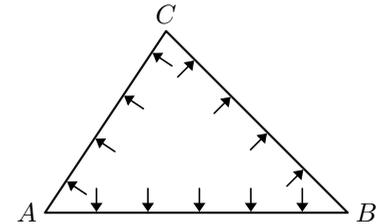


Mittels einer ganz ähnlichen Argumentation kann man zeigen, dass sich jeweils eine Innenwinkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierenden der beiden anderen Winkel in einem Punkt (Ankreismittelpunkt) schneiden. Man muss lediglich das Vorzeichen einiger Kräfte ändern, siehe Skizze.

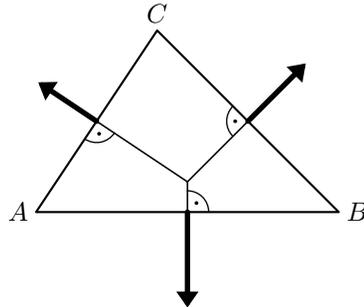
Ebenso kann man auf „mechanische“ Art und Weise zeigen, dass auch die Mittelsenkrechten eines Dreiecks einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Stellen wir uns vor, dass das Dreieck mit Gas gefüllt sei, welches nach außen auf die Seiten einen Druck ausübt. Da Gas allseitig den gleichen Druck ausübt, ist das Dreieck im Kräftegleichgewicht.

Der Druck des Gases übt auf jede Seite eine resultierende Kraft aus. Weil der Druck überall gleich ist, steht diese Kraft senkrecht zur Seite, greift am Seitenmittelpunkt an und ist proportional zur Seitenlänge.



Die Achsen der drei resultierenden Kräfte müssen von einem gemeinsamen Punkt ausgehen, andernfalls ergäbe sich wiederum ein resultierendes Drehmoment auf das Dreieck – das Dreieck wäre dann aber nicht im Gleichgewicht. Damit ist bewiesen, dass die drei Mittelsenkrechten durch einen gemeinsamen Punkt gehen.



*Thinking Mechanically. In: Mathematical Digest No. 124 (July 2001)  
University of Cape Town, South Africa  
<http://www.mth.uct.ac.za/~digest>  
(Veröffentlicht in Heft 07/02)*

Aufruf der Redaktion: Wer kennt noch weitere so schön anschauliche „mechanische“ Beweise?

## Berührende Kreise und Kugeln

Die ersten Besprechungen der untenstehenden Aufgabe findet man in der Korrespondenz von R. Descartes (1596–1650) mit der Prinzessin Elizabeth (1618–1680), der Enkelin des englischen Königs James 1<sup>st</sup>, siehe [1]. Nochmalig wurde diese Aufgabe 1936 von F. Soddy (1877–1956, berühmter englischer Radiochemiker, Nobelpreis 1921) behandelt. F. Soddy hat in der englischen Zeitschrift „Nature“ das Gedicht „The kiss precise“ veröffentlicht, in welchem er über seine eigene Lösung erzählt hat.

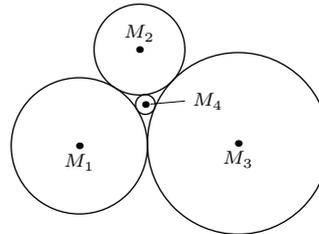
Aus den weiteren Forschungen wurde bekannt, dass diese Aufgabe sowie ihre Verallgemeinerung im Falle des dreidimensionalen Raumes 1796 in Japan bekannt war; der vollständige Beweis wurde 1830 veröffentlicht [2].

In diesem Beitrag wird die Aufgabe mit zwei Verfahren gelöst: Zuerst besprechen wir eine elementargeometrische Lösung; als zweites beweisen wir die Verallgemeinerung dieser Aufgabe auf den  $n$ -dimensionalen Raum.

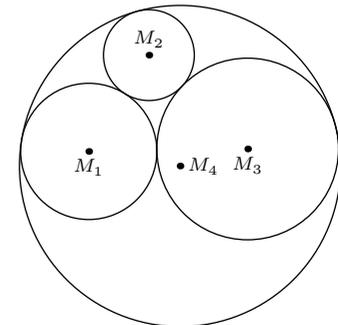
### Aufgabe:

In der Euklidischen Ebene seien vier Kreise (Radien  $r_1, r_2, r_3, r_4$ ) gegeben, die einander paarweise berühren. Es sei  $k_i = \frac{1}{r_i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Dann gilt:

- (a)  $2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2$ , wenn die Kreise einander von außen berühren (siehe Skizze 1), bzw.
- (b)  $2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 - k_4)^2$ , wenn drei Kreise einander von außen berühren und der vierte Kreis sie von innen berührt (in diesem Fall ist  $r_4$  der größte Radius, siehe Skizze 2).

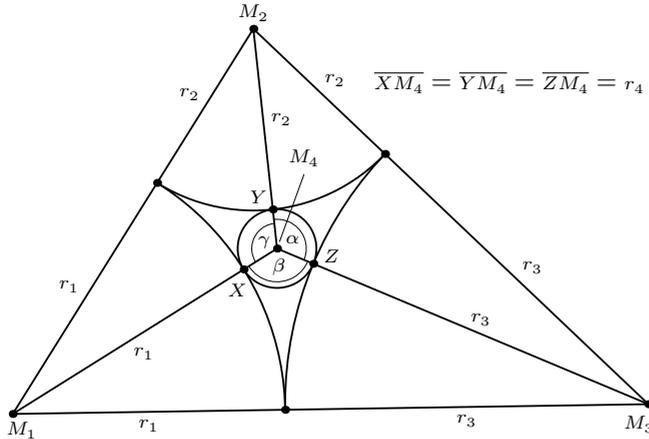


Skizze 1



Skizze 2

### Elementargeometrische Lösung



Es ist  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \pi$ , so dass die folgende trigonometrische Identität gilt:<sup>1</sup>

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Wir ermitteln nun alle diese Funktionen. Im Dreieck  $\triangle M_1M_4M_2$  folgt mit Hilfe des Kosinussatzes

$$\cos \alpha = \frac{(r_4 + r_2)^2 + (r_4 + r_3)^2 - (r_2 + r_3)^2}{2(r_4 + r_2)(r_4 + r_3)}.$$

<sup>1</sup>Für  $x + y + z = \pi$  zeigen wir  $\sin^2 y + \sin^2 z - \sin^2 x = 2 \sin y \sin z \cos x$ .

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \sin^2(\pi - y - z) = \sin^2(y + z) = (\sin y \cos z + \sin z \cos y)^2 = \sin^2 y \cos^2 z + \sin^2 z \cos^2 y + 2 \sin y \cos z \sin z \cos y \\ &= \sin^2 y(1 - \sin^2 z) + \sin^2 z(1 - \sin^2 y) + 2 \sin y \cos z \sin z \cos y \end{aligned}$$

$$\cos x = \cos(\pi - y - z) = -\cos(y + z) = -\cos y \cos z + \sin y \sin z$$

Setzt man beides in die Behauptung ein, so sieht man unmittelbar, dass diese richtig ist.

Mittels  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$  erhalten wir

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(r_4+r_2)^2 + (r_4+r_3)^2 - (r_2+r_3)^2}{2(r_4+r_2)(r_4+r_3)} \right) = \frac{r_4(r_4+r_2+r_3)}{(r_4+r_2)(r_4+r_3)}, \quad (2)$$

sowie

$$1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{r_2 r_3}{(r_4+r_2)(r_4+r_3)} \quad \text{und analog dazu} \quad (3)$$

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{r_3 r_1}{(r_4+r_3)(r_4+r_1)}, \quad \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{r_1 r_2}{(r_4+r_1)(r_4+r_2)}.$$

Einsetzen von (2) und (3) in (1) ergibt

$$\frac{r_3 r_1}{(r_4+r_3)(r_4+r_1)} + \frac{r_1 r_2}{(r_4+r_1)(r_4+r_2)} - \frac{r_2 r_3}{(r_4+r_2)(r_4+r_3)} = \frac{2r_1 \sqrt{r_4 r_2 r_3 (r_4+r_2+r_3)}}{(r_4+r_2)(r_4+r_3)(r_4+r_1)}.$$

Wir multiplizieren dies mit  $\frac{(r_4+r_1)(r_4+r_2)(r_4+r_3)}{r_1 r_2 r_3 r_4}$  und haben

$$\left( \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_2} \right) + \left( \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_3} \right) - \left( \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_1} \right) = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_4} \cdot \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} \cdot \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_2} \cdot \frac{1}{r_3}}$$

bzw. mit  $k_i = \frac{1}{r_i}$

$$k_2 + k_3 + k_4 - k_1 = 2\sqrt{k_4 k_2 + k_4 k_3 + k_2 k_3}.$$

Quadrieren und Umformen führt dann schließlich auf die Behauptung

$$2(k_4^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_1^2) = (k_4 + k_2 + k_3 + k_1)^2.$$

## Verallgemeinerung im $n$ -dimensionalen Raum

**Aufgabe:** Im  $n$ -dimensionalen Raum sind  $n + 2$  Kugeln mit den Radien  $r_1, r_2, \dots, r_{n+2}$  gegeben und es sei  $k_i = \frac{1}{r_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n + 2$ ). Dann gilt:

$$n(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_{n+2}^2) = (k_1 + k_2 + \dots + k_{n+2})^2, \quad (4)$$

wenn sich die Kugeln einander von außen berühren.

**Lösung:** Um diese Aufgabe zu lösen, verwenden wir die Theorie der Determinanten, die man in verschiedenen Lehrbüchern der Linearen Algebra findet. Zur Vereinfachung werden wir im  $(n - 1)$ -dimensionalen Raum  $n + 1$  einander von außen berührende Kugeln untersuchen. Ihre Radien seien  $r_0, r_1, \dots, r_n$ , siehe [3].

Wir bezeichnen durch  $\vec{a}_{ij}$  den Vektor, der die Mittelpunkte der Kugeln Nummer  $i$  und  $j$  verbindet, d. h.  $|\vec{a}_{ij}| = a_{ij} = r_i + r_j$ . Durch Quadrieren der Vektorgleichung  $\vec{a}_{ij} = \vec{a}_{0j} - \vec{a}_{0i}$  findet man das Skalarprodukt

$$\vec{a}_{0i} \cdot \vec{a}_{0j} = \frac{1}{2}(a_{0i}^2 + a_{0j}^2 - a_{ij}^2). \quad (5)$$

Wir haben  $n$  Vektoren  $a_{01}, a_{02}, \dots, a_{0n}$ , die in einem  $n$ -dimensionalen Raum liegen, d. h. sie sind linear abhängig. Daraus folgt, dass ihre Gramsche Determinante (J. Gram 1850–1916, dänischer Mathematiker) gleich Null ist:

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_{01} \cdot \vec{a}_{01} & \vec{a}_{01} \cdot \vec{a}_{02} & \cdots & \vec{a}_{01} \cdot \vec{a}_{0n} \\ \vec{a}_{02} \cdot \vec{a}_{01} & \vec{a}_{02} \cdot \vec{a}_{02} & \cdots & \vec{a}_{02} \cdot \vec{a}_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{a}_{0n} \cdot \vec{a}_{01} & \vec{a}_{0n} \cdot \vec{a}_{02} & \cdots & \vec{a}_{0n} \cdot \vec{a}_{0n} \end{vmatrix} = 0.$$

Hier setzen wir (5) ein und erhalten (jede Zeile wurde mit 2 multipliziert):

$$D_n := \begin{vmatrix} 2a_{01}^2 & a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{12}^2 & \cdots & a_{01}^2 + a_{0n}^2 - a_{1n}^2 \\ a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{12}^2 & 2a_{02}^2 & \cdots & a_{02}^2 + a_{02}^2 - a_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{01}^2 + a_{0n}^2 - a_{1n}^2 & a_{02}^2 + a_{0n}^2 - a_{2n}^2 & \cdots & 2a_{0n}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist gleichwertig zu der Determinante  $(n + 2)$ -ten Grades:<sup>1</sup>

$$\tilde{D}_{n+2} := \begin{vmatrix} 0 & a_{01}^2 & \cdots & a_{0n}^2 & 1 \\ a_{01}^2 & \boxed{\phantom{(D_n)}} & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{0n}^2 & & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei der eingerahmte Teil die zur Determinante  $D_n$  gehörende Matrix sein soll. Die erste Zeile wird nun von jeder anderen Zeile außer der letzten subtrahiert; das Gleiche wird mit den Spalten getan. Es ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{01}^2 & \cdots & a_{0n}^2 & 1 \\ a_{01}^2 & 0 & \cdots & a_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{0n}^2 & a_{1n}^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

<sup>1</sup>Wegen der Nullen in der letzten Zeile und Spalte tragen nur die beiden Einsen und die innere Matrix zur Determinante  $\tilde{D}_{n+2}$  bei.

wobei außerdem alle Vorzeichen umgedreht wurden. Wir multiplizieren jetzt die  $i$ -te Zeile mit  $k_i^2$  und die  $j$ -te Zeile mit  $k_j^2$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n$ ). Dabei entstehen die Terme  $a_{ij}^2 \cdot k_i^2 k_j^2 = (r_i + r_j)^2 k_i^2 k_j^2 = (\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_j})^2 k_i^2 k_j^2 = (k_i + k_j)^2$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & (k_0 + k_1)^2 & \cdots & (k_0 + k_n)^2 & k_0^2 \\ (k_0 + k_1)^2 & 0 & \cdots & (k_1 + k_n)^2 & k_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (k_0 + k_n)^2 & (k_1 + k_n)^2 & \cdots & 0 & k_n^2 \\ k_0^2 & k_1^2 & \cdots & k_n^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Jetzt subtrahieren wir die letzte Zeile und Spalte von allen anderen. Wenn man dann die letzte Zeile und Spalte noch verdoppelt, ergibt sich

$$\begin{vmatrix} -2k_0^2 & 2k_0k_1 & \cdots & 2k_0k_n & 2k_0^2 \\ 2k_0k_1 & -2k_1^2 & \cdots & 2k_1k_n & 2k_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2k_0k_n & 2k_1k_n & \cdots & -2k_n^2 & 2k_n^2 \\ 2k_0^2 & 2k_1^2 & \cdots & 2k_n^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Schließlich dividieren wir die  $i$ -te Zeile durch  $k_i$  und die  $j$ -te Spalte durch  $k_j$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n-1$ ) und kürzen alle Zweien:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & k_0 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 & k_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & k_n \\ k_0 & k_1 & \cdots & k_n & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung hat die Form

$$P_n \cdot (k_0^2 + k_1^2 + \dots + k_n^2) + 2Q_n \cdot (k_0k_1 + k_0k_2 + \dots + k_{n-1}k_n) = 0 \quad (6)$$

$$\text{mit } P_n := - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad Q_n := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Jetzt zeigen wir, dass  $P_n = -(n-2)Q_n$  ist: Addieren wir zur erste Zeile in  $P_n$  alle anderen Zeilen, dann wird jedes Element der ersten Zeile gleich  $n-2$ .

Aus (5) folgt  $(n-2) \cdot (k_0^2 + k_1^2 + \dots + k_n^2) = 2 \cdot (k_0k_1 + k_0k_2 + \dots + k_{n-1}k_n)$  oder nach Umformung

$$(n-1)(k_0^2 + k_1^2 + \dots + k_n^2) = (k_0 + k_1 + \dots + k_n)^2.$$

**Anmerkung:** Die Formel (4) ist im Prinzip auch richtig, wenn sich Kugeln von innen berühren. Man kann diese beide Fälle zusammenbringen: Wir vermuten, dass die Gleichung dann für  $|k_i| = \frac{1}{r_i}$  gilt, wobei  $k_i$  und  $k_j$  dasselbe Vorzeichen haben, wenn die entsprechenden zwei Kugeln einander von außen berühren, und verschiedenes Vorzeichen haben, wenn sie einander von innen berühren.

Zum Schluss stellen wir noch eine interessante **Aufgabe:**

*Die Mittelpunkte dreier Kreise, die einander von außen berühren, bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Umfang  $2s$ . Man berechne den Radius des Kreises, welchen diese drei von innen berühren.*

## Literatur

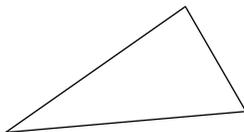
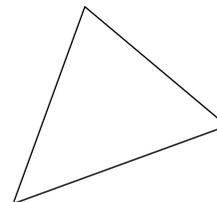
- [1] Oeuvres de Descartes, publiées par Adam et Tannery, Vol. IV, Paris, 1901, p. 63.
- [2] H. FUKAGAWA, D. PEDOE: *Japanese Temple Geometry Problems*. San Gaku, Winnipeg (Kanada), 1989.
- [3] И. Ф. ШАРЫГИН, М. И. ШТОГРИН: *Кто открыл формулу Сократа?* Математика в Школе, № 2–3, Москва, 1992.
- [4] D. PEDOE: *Geometry – A comprehensive Course*. Dover Publications, New York, 1998.
- [5] S. BOSCH: *Lineare Algebra*. Springer, Berlin, 2001.

*Oleg Faynshteyn, Leipzig  
(Erschienen in Heft 07/02)*

## Immer Ärger mit den Dreiecken ...

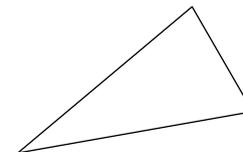
Wer kennt das nicht? Man nimmt sich mal wieder ein paar Minuten Zeit und versucht sich an der Lösung der  $\sqrt{\text{WURZEL}}$ -Aufgaben auf der letzten Seite der neusten Ausgabe. Am besten fängt man mit der Geometrie-Aufgabe an. Da kann man wenigstens eine kleine Skizze machen, um sich den Sachverhalt zu veranschaulichen. So kommt einem etwas leichter die nötige Lösungsidee.

Gesagt, getan: „Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$  ...“ Unser erster Versuch sieht etwa so aus (siehe Skizze). Naja, das war nicht so gelungen. Immerhin sieht das Dreieck ungefähr gleichseitig aus. Das ist schlecht, denn durch so einen Spezialfall wird man schnell dazu verleitet, mit unbewiesenen Annahmen zu arbeiten, die man fälschlicherweise aus der Skizze abgelesen hat.



Also, Versuch Nummer zwei. Auch nicht gerade besser: Jetzt ist es beinahe rechtwinklig, also wieder untauglich für eine Beweisskizze. Wir lassen uns nicht kleinkriegen und versuchen es noch einmal.

Nun haben wir ein fast gleichschenkliges Dreieck. Uns verlässt die Geduld. Vielleicht sollten wir doch lieber mit einer anderen Aufgabe anfangen, denken wir uns, denn so langsam beschleicht uns das Gefühl, wir hätten es mit einem tieferen Prinzip zu tun.



In der Tat, dahinter scheint sich viel zitiertes

**MURPHYS Gesetz:** „Was schief gehen kann, geht auch schief.“

zu verbergen. In diesem Beitrag werden wir der Sache auf den Grund gehen und dieses „Gesetz“ für unsere Situation „beweisen“. Dazu parametrisieren wir alle Dreiecke in geeigneter Weise und zeigen, dass bei einer gewissen Toleranz jedes beliebige Dreieck einem Spezialfall gleichkommt. Das mag zunächst entmutigend erscheinen. Wir machen jedoch aus der Not eine Tugend und konstruieren wenigstens ein „maximal gewöhnliches“ Dreieck, das möglichst weit von den obigen Spezialfällen entfernt liegt und so die bestmögliche Skizze eines beliebigen Dreiecks liefert.

Zunächst sei gesagt, dass es genügt, die Dreiecke bis auf Ähnlichkeit zu betrachten. Die oben aufgeführten Spezialfälle (gleichseitig, rechtwinklig und gleichschenkelig) sind ja allesamt durch spezielle Winkel gekennzeichnet und damit unabhängig von der absoluten Größe des Dreiecks.

Um Klassen ähnlicher Dreiecke zu parametrisieren, ist es nahe liegend, einfach zwei Winkel zu wählen. Diese nennen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\alpha$  und  $\beta$ . Der dritte Winkel  $\gamma$  ist dann durch die Innenwinkelsumme  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  festgelegt.

Zwei freie Parameter legen eine Darstellung der möglichen Dreiecke als Punkte in der Ebene nahe. Dafür bietet sich ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit dem Koordinatenwinkel  $60^\circ$  an. Dieses ermöglicht nämlich eine gleichberechtigte Darstellung aller Innenwinkel, wie wir gleich sehen werden.

In einem schiefwinkligen Koordinatensystem hat man im wesentlichen folgende Möglichkeiten, einen Punkt mit Koordinaten zu versehen (vergleiche Abbildung 1):

- Man zeichnet zwei achsenparallele Geraden durch den Punkt, welche die beiden Achsen in je einem Punkt schneiden, und liest die Koordinaten
    - als Längen der Achsenabschnitte vom Ursprung zum jeweiligen Schnittpunkt; oder
    - als Längen der Strecken vom Punkt  $P$  aus zu den Schnittpunkten
- ab.

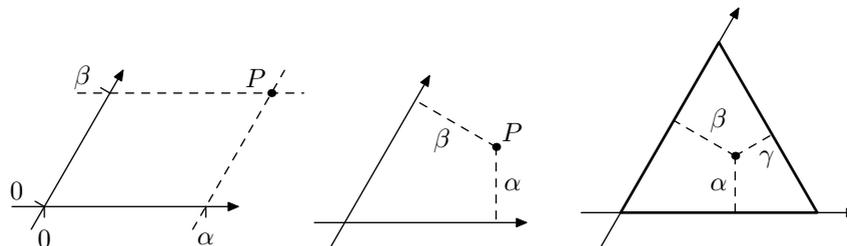


Abbildung 1: Verschiedene Koordinatensysteme

- Man fällt von dem Punkt  $P$  aus die Lote auf die beiden Achsen und liest die Koordinaten
  - als Achsenabschnitte vom Ursprung zu den entsprechenden Lotfußpunkten; oder
  - als Längen der zugehörigen Lote
 ab.

Für ein kartesisches (=rechtwinkliges) Koordinatensystem fallen alle Möglichkeiten zusammen. Im vorliegenden Fall entscheiden wir uns für die letzte – weil einfachste – Variante. Man macht sich aber leicht klar, dass die vorletzte Alternative keine gleichberechtigte Darstellung der drei Innenwinkel liefert und dass die ersten beiden Möglichkeiten auf das selbe Ergebnis führen.

Wir wählen  $\alpha$  und  $\beta$  als Koordinaten. Dann ist der für Dreiecke zulässige Bereich  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  durch ein gleichseitiges Dreieck gegeben, welches von den Koordinatenachsen sowie den Geraden durch die Punkte  $(\alpha, \beta) = (180^\circ, 0)$  und  $(\alpha, \beta) = (0, 180^\circ)$  berandet wird, wie in Abbildung 1 rechts zu sehen. Wir werden es im Folgenden „unser“ Dreieck nennen, um Verwechslungen mit all den vielen anderen Dreiecken in diesem Artikel auszuschließen.

Den dritten Innenwinkel  $\gamma$  kann man nun in gleicher Art und Weise als Lotlänge zur verbliebenen Seite unseres Dreiecks

ablesen. Dann muss die Summe der drei Lote, die ja die Innenwinkelsumme von  $180^\circ$  darstellt, unabhängig von der Lage des Punktes sein. Wir formulieren dazu folgende

**Übungsaufgabe:** Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck. Man beweise, dass die Summe der Längen der von einem beliebigen Punkt in dessen Innern auf die Seiten gefällten Lote unabhängig von der Lage dieses Punktes bleibt. Tipp: Man betrachte die Flächeninhalte der durch den Punkt entstehenden Teildreiecke.

Ein Punkt im Innern unseres Dreiecks stellt jetzt eine Klasse ähnlicher Dreiecke dar. Das ist ein Dreieck mit all den zu ihm ähnlichen Dreiecken, charakterisiert durch zwei ihrer Innenwinkel.

Jetzt können wir uns überlegen, wo man in diesem Diagramm (siehe Abbildung 2) unsere Spezialfälle wiederfindet

- Die gleichseitigen Dreiecke  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$  finden sich in nur einem Punkt – dem Mittelpunkt unseres Dreiecks –, da sie alle ähnlich sind.
- Die gleichschenkligen Dreiecke  $\alpha = \beta$ ,  $\beta = \gamma$  sowie  $\gamma = \alpha$  bilden die Höhen unseres Dreiecks.
- Die rechtwinkligen Dreiecke  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$  sowie  $\gamma = 90^\circ$  bilden die Seiten des Höhenfußpunktdreiecks.
- Die entarteten Dreiecke  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  sowie  $\gamma = 0$  bilden die Seiten unseres Dreiecks.

Außerdem finden sich innerhalb des Höhenfußpunktdreiecks die spitzwinkligen und außerhalb die stumpfwinkligen Dreiecke wieder.

Jetzt können wir uns der eingangs gesetzten Aufgabe zuwenden: Um welchen Winkel  $\delta$  kann man sich maximal von einem Spezialfall entfernen, ohne sich einem anderen Spezialfall zu nähern? Welches ist dann das bestmögliche allgemeine Dreieck? Offensichtlich bilden alle Dreiecke, deren Innenwinkel jeweils maximal um einen Betrag  $\delta$  von denen des gesuchten Dreiecks abweichen, gerade ein Sechseck mit je drei zu den Seiten unseres Dreiecks parallelen Seiten. Somit suchen wir jetzt derartige Sechsecke mit möglichst großem  $\delta$ , die keinen Spezialfall enthalten. Dafür gibt es (bis auf Vertauschung der Winkel) genau zwei Möglichkeiten; eine für spitz- und eine für stumpfwinklige Dreiecke. Wir überlassen es dem geneigten Leser als eine

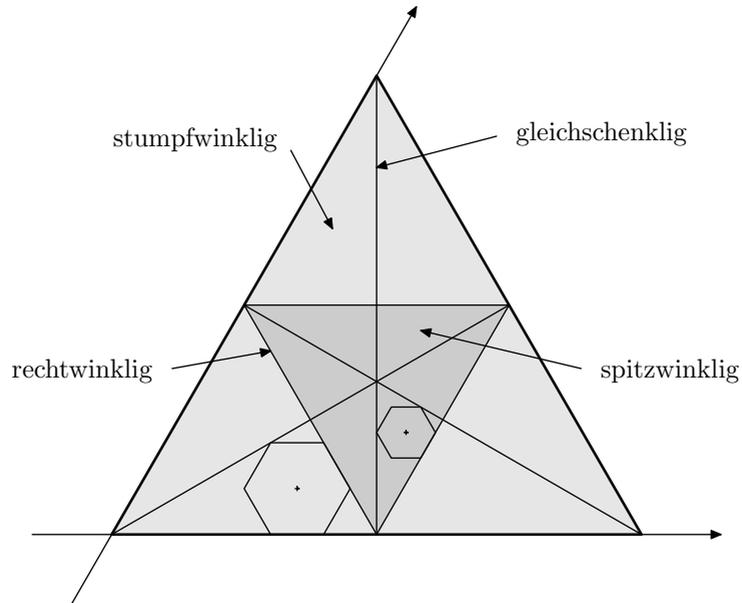


Abbildung 2: Das „Dreieck der Dreiecke“

weitere Übungsaufgabe, die Koordinaten und damit die Innenwinkel der entsprechenden Dreiecke zu bestimmen. (Vorsicht! Man beachte, wie die Winkel abgelesen werden.) Das Ergebnis lautet:

- Das bestmögliche nicht-spezelle spitzwinklige Dreieck besitzt die Innenwinkel

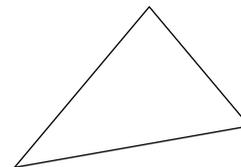
$$40^\circ, \quad 60^\circ \quad \text{und} \quad 80^\circ$$

Der Abstand zu den Spezialfällen beträgt  $\delta = 10^\circ$ .

- Das bestmögliche nicht-spezelle stumpfwinklige Dreieck besitzt die Innenwinkel

$$18^\circ, \quad 54^\circ \quad \text{und} \quad 108^\circ$$

Der Abstand zu den Spezialfällen beträgt  $\delta = 18^\circ$ .



Das stumpfwinklige ist ganz akzeptabel, aber das spitzwinklige sieht immer noch ganz schön rechtwinklig aus. Nichtsdestotrotz sind wir damit zufrieden und können uns ruhigen Gewissens wieder der Lösung der Geometrie-Aufgaben widmen. Nur eine Bemerkung noch: Natürlich ist die Abbildung aller Dreiecke in der oben dargestellten Weise etwas willkürlich. Es wären sicher noch weitere Arten möglich – etwa eine, die der subjektiven Wahrnehmung des menschlichen Betrachters gerecht wird. Fordert man jedoch Linearität und Gleichberechtigung in den drei Winkeln, so ist die diskutierte die einzige Darstellung.

Vielleicht schneidet sich ja die eine oder der andere nun nach dem Lesen dieses Artikels zwei kleine Schablonen mit diesem „normalsten“ Dreiecken und erspart sich so zukünftigen Ärger mit Geometrieaufgaben über Dreiecke in der  $\sqrt{\text{WURZEL}}$ .

*Björn Hendriks, Braunschweig  
Konrad Schöbel, Jena  
(Erschienen in Heft 09+10/02)*

## SoMaLa

**D**as **Sommer-MaLa 2002** fand vom 20. 7. bis zum 29. 7. 2002 in Schafhausen statt. Und wer sich fragt, ob man den Ort kennen sollte: Nein! Er liegt idyllisch in dem Thüringer Teil der Rhön circa 20 Kilometer westlich von Meiningen, wo sich auch der nächste Bahnhof befindet. In ähnlich großer Entfernung gibt es einen baumlosen Streifen – ehemals deutsch-deutsche Grenze genannt.



In dieser abgelegenen Gegend in einem ganz und gar nicht städtisch wirkenden Dörfchen trafen sich also Ostthüringer Schüler und Studenten, um Mathematik und Einiges drumherum zu betreiben.

Mathematik war für die Schüler nicht etwa diese langweilige Schulmathematik, sondern **interessante Themen**, die die durchführenden Studenten aus eigener Erfahrung wie dem Studium kennen und den Schülern vortrugen. Jeden Tag zwei Doppelstunden schöne Mathematik waren für alle angenehm und legten den Grundstein für die Tagesplanung.

Die Freizeitaktivitäten hatten also nur am Nachmittag Platz. Dafür wurde diese Möglichkeit rege genutzt. Man spielte Tischtennis und Fußball und Schach und Dame und Siedler von Catan und Zértz und **Marja Pussi** und Volleyball und und und ...

**E**inige Spiele und Freizeitaktivitäten waren Ideen der Studenten. So die **Matherallye**. Bei diesem Spiel müssen in Teams gegeneinander mathematische Aufgaben gelöst werden. Dazu wurden zunächst die Schüler in drei Mannschaften aufgeteilt. In jeder gab es des Weiteren drei Untereinheiten, die aus altersgleichen Schülern bestanden. Es gab eine Gruppe 8./9. Klasse, eine 10. Klasse und eine für die 11er und 12er. Auf einer Wiese wurden anschließend in ausreichend großer Entfernung voneinander drei Punkte ausgewählt.

Zu einem dieser Punkte gingen alle Acht- und Neuntklässler, zu einem anderen die Zehntklässler und zum dritten Punkt die Elf- und Zwölftklässler. Jedes Team musste 30 Aufgaben lösen – zehn pro Altersgruppe. Am Anfang erhielt man jedoch nur drei Aufgaben.

Wenn man eine Aufgabe gelöst hatte, musste man zu einem anderen Punkt gehen um die Lösung auf Richtigkeit überprüfen zu lassen. Die 8er und 9er mussten zu dem Punkt der 11er und 12er gehen, die 10er zum Punkt der 8er und 9er und die 11er und 12er mussten sich zum Punkt der 10er aufmachen. Stimmt die Lösung, so erhielt man drei Punkte, und die Teampartner an dieser Station bekamen die nächste Aufgabe. War die Lösung falsch, musste man zurück zu seinem Punkt gehen und es erneut versuchen, erhielt diesmal für die richtige Lösung aber nur noch einen Punkt.

Aber so wäre das Spiel ja noch viel zu einfach. Wie von einer größeren Anzahl an Rateshows bekannt, gab es natürlich auch noch einen Joker. Um den Joker zu aktivieren, musste die ganze Gruppe in einer bestimmten Richtung um die Spielfläche laufen. Sobald der Joker aktiviert war, konnte man ihn dann bei einer beliebigen Aufgabe einsetzen um die doppelte Punktzahl zu erhalten.

**E**ine Nachmittagsbeschäftigung war, dass einige von uns ins „nahe gelegene“ **Schwimmbad** gingen. Leider wussten wir den Weg nicht so genau, und so dauerte es circa eineinhalb Stunden, bis wir dort waren.

Im Bad war das Wasser kühl, so dass erst nur die Mutigen hinein gingen. Später war es aber für alle ein großer Spaß. Nebenbei erfuhren wir, dass Michael Schumacher den Grand Prix und somit die Weltmeisterschaft gewonnen hatte. Denn ein sehr schlauer Schumi-Fan startete am helllichten Tag ein Feuerwerk, welches man nur mit Mühe erkennen konnte.

**Z**u den Höhepunkten des Mathelagers gehörten natürlich wieder einmal das **Berg-** und das **Abschlussfest**. Neben vielen altbekannten MaLaSpielen wurde dieses Mal zur Eröffnung Dame gespielt. Aber nicht wie sonst mit kleinen Holz-, Plastik- oder Elfenbeinfiguren, sondern mit echten Menschen.

Dazu wurde zuerst mit Kreide ein Spielfeld aufgemalt. Es gab weiße – also ausgemalte – und schwarze Felder. Da die Kreide nicht so perfekt auf dem Boden hielt, spielten wir auf den schwarzen Feldern.

Zu jedem Team gehörte neben den Steinen auch ein Spielführer. Diese verloren jedoch relativ früh den Überblick über das Spiel. Als Damen wurden die Studenten „missbraucht“, um einen klaren Kontrast zu den restlichen Spielern herzustellen. Am **Lagerfeuer** ging es dann weiter bis spät in den Abend ...

**A**m nächsten Tag konnten wir etwa eine Stunde länger schlafen, denn die **Ganztagswanderung** stand auf dem Plan. Wir wanderten frisch, fromm, fröhlich und frei durch die Rhön. Wir kamen an die ehemalige Grenze, die man vom Weiten gar nicht erkennt, bis man in einer baumfreien Schneise steht, die nur langsam aufgeforsdet wird.

Rast haben wir an einer Ruine gemacht, bei der wir uns auf die Außenmauer setzten um die schöne Aussicht zu genießen. Kurz vor Schafhausen trennten sich unsere Wege, denn einige konnten es gar nicht erwarten, wieder zurück am Ausgangspunkt zu sein.

Anderen gefiel die Rhön so gut, dass sie sich noch auf den Weg zu einem Aussichtsturm begaben. Dort angekommen, untersagte es einem der eigene Überlebenswille, den Turm auch noch zu besteigen. Denn dieses Gebäude war arg heruntergekommen, Außenmauern fehlten gar ganz und die Leiter, welche auf die erste Ebene führte, hatte schon einige gebrochene Sprossen. Diese Leiter war übrigens die einzige noch vorhandene und brachte einen auf eine Höhe von nicht mal 3 Metern ...

Nach diesem R(h)einfall gingen wir wieder Richtung Schafhausen – auf schnurgeradem Weg natürlich. Das heißt soviel, wie dass wir keine Brennesselwiese ausließen. Dies bereitete vor allem den Trägern kurzer Hosen besonders große Freude. Trotz des weiteren Weges kam die wanderfreudigere Gruppe zuerst am Ziel an. Das anschließende Abendessen war auf alle Fälle für jeden eine ganz besonders große Freude ...

**A**lles in allem war es wieder einmal ein **tolles MaLa** – so ganz weit weg von großstädtischer Zivilisation!

*Martin Horatschek und Andreas Kübel, Jena  
(Erschienen in Heft 12/02)*

## Lösungsbedingungen für die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ -Aufgaben

Die Lösungen sind – jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name und Adresse – unter dem Kennwort „Wurzel-Aufgaben“ an die Redaktion zu senden. Wer an einer Rücksendung seiner korrigierten Aufgaben interessiert ist, lege bitte einen frankierten Briefumschlag bei.

Alle Aussagen sind zu beweisen, unbewiesen verwendete Sachverhalte sind anzugeben. Natürlich können auch unvollständige Lösungen eingesandt werden.

In den Heften 3 + 4 und 9 + 10 erfolgt dann jeweils die Auflösung der Aufgaben. Einsendeschluss dazu ist der 1. Februar bzw. der 1. August. Jedoch wäre das frühere Einsenden wünschenswert, weil es die Arbeit der Redaktion erleichtert. Außer einer Lösung veröffentlichen wir auch eine Übersicht über alle Leserinnen und Leser, welche vollständig richtige Lösungen eingesandt haben.

---

## Hinweise für Autoren

Die Redaktion der  $\sqrt{\text{WURZEL}}$  freut sich, wenn Leser der Zeitschrift als Autoren mitwirken möchten und Artikel zur Veröffentlichung einsenden. Alle eingehenden Artikel werden geprüft, ihre äußere Form spielt dabei keine Rolle.

Ebenfalls sehr erwünscht sind Vorschläge für Aufgaben, wenn möglich (aber nicht Bedingung) mit Lösung.

Sie als Autor können die Drucklegung Ihres Textes erleichtern, wenn Sie uns den Text in einer maschinenlesbaren Form (auf einer DOS-kompatiblen Diskette oder über E-Mail) übermitteln. Das File sollte nur druckbare ASCII-Zeichen enthalten, insbesondere keinerlei Steuerzeichen eines Textverarbeitungssystems.

Verfügen Sie jedoch über  $\text{\LaTeX}$ , freuen wir uns selbstverständlich, wenn Sie uns gleich ein `.tex`-File senden. Die aktuelle Version unserer Klassendatei (`zzwurzel.cls`) finden Sie auf unserer Homepage unter „Autorenhinweise“, falls Sie das Layout schon sehr

genau vorbereiten möchten. Es dürfte aber für die meisten Fälle völlig ausreichen, wenn Sie `\documentclass[10pt]{article}` in Verbindung mit `\usepackage[ngerman]{babel}` und `\textheight492pt` sowie `\textwidth115mm` verwenden.

Sie brauchen sich nicht um Kopf- und Fußzeilen sowie Seitennummern zu sorgen. Verwenden Sie bitte keine „harten“  $\TeX$ -Kommandos, markieren und kommentieren Sie verwendete Makros, und schicken Sie alle Nicht-Standard-Elemente, die Ihr Text benutzt, vollständig mit – z. B. eigene Style-Files oder spezielle Fonts.

Wenn Sie ein anderes Textsatzsystem als  $\LaTeX$  verwenden und Zweifel daran haben, ob aus Ihrem (nur) ASCII-File das gewünschte Aussehen des Textes richtig hervorgeht, senden Sie uns außerdem zur Sicherheit einen Ausdruck des Artikels mit. In jedem Fall bemühen wir uns, das Layout entsprechend Ihren Vorstellungen und den Gepflogenheiten der Zeitschrift zu gestalten. Um die Redaktionsarbeit zu beschleunigen, werden keine Korrekturfahnen versandt, wenn Sie dies nicht ausdrücklich fordern.

Sollten Sie die eventuelle Veröffentlichung Ihres Beitrags auf den WWW-Seiten der  $\sqrt{\text{WURZEL}}$  nicht wünschen, bitten wir Sie um eine entsprechende Mitteilung bei der Einsendung des Manuskriptes.

Nach Erscheinen eines Artikels erhält der Autor drei Freixemplare (bei Aufgaben ein Freixemplar) der betreffenden Ausgabe. Weitere Hefte können zum normalen Verkaufspreis bestellt werden.

*Ihre  $\sqrt{\text{WURZEL}}$ -Redaktion*

## Aufgaben

ι 2	Oleg Faynshteyn, Leipzig
Welche Zahl ist größer, $2002!$ oder $1002^{2002}$ ?	
ι 3	Zeitschrift „Paradox“ 2/2001, Melbourne/Australien
Man beweise, dass der Neujahrstag häufiger auf einen Sonntag als auf einen Samstag fällt.	
ι 11	Hans Rudolf Moser, Bürglen/Schweiz
Man ermittle die Summe der unendlichen Reihe $1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left( \frac{1}{4j-1} + \frac{1}{4j+1} \right) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$	
ι 13	Prof. Šefket Arslanagić, Sarajevo
Es sei $x_i \geq 0$ , $i = 1, 2, \dots, n$ , und $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ . Man beweise, dass gilt: $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i}.$	
ι 14	Boris Houska, Viermünden
Genau sieben der acht Ecken eines Polyeders liegen auf einer Kugel. Man zeige, dass dieses Polyeder mindestens eine dreieckige Seitenfläche besitzt.	
ι 39	Michael Möbius †, Sulzbach/Main
Man bestimme alle Lösungen der diophantischen Gleichung $47x - 29y = 5$ .	

ι 18	Georg Wille, Halle
<p>Wenn in jedem siebten Ei eine von zehn gleichwahrscheinlichen Sammelfiguren steckt, wie viele Eier muss man durchschnittlich kaufen, um einen kompletten Satz aller zehn Figuren zu erhalten?</p> <p><i>Zusatz:</i> Wie viele Eier muss man kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% einen kompletten Satz aller zehn Figuren zu bekommen?</p>	
ι 21	Oleg Faynshteyn, Leipzig
<p>Man berechne die Stammfunktion von <math>f(x) = \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2}</math>.</p>	
ι 28	Martin Schneider, Salzburg/Österreich
<p>Man betrachte Näherungen der Zahl <math>\pi</math>, die sich mit ganzen Zahlen und den Operationen <math>+</math>, <math>-</math>, <math>\cdot</math>, <math>\div</math>, <math>x^y</math>, <math>\sqrt{\quad}</math>, <math>!</math> ausdrücken lassen. Dabei bezeichne</p> <p><math>a</math> die Anzahl der insgesamt verwendeten Ziffern und</p> <p><math>b</math> die Anzahl der „korrekten“ Nachkommastellen der Näherung.</p> <p>Der Quotient <math>\frac{a}{b}</math> sei <math>c</math> genannt.</p> <p>Beispiele: Für die Näherung <math>\frac{22}{7} = 3,14286 \dots</math> gilt <math>a = 3, b = 2, c = \frac{3}{2}</math>, und für <math>\frac{355}{113} = 3,1415929 \dots</math> gilt <math>a = b = 6, c = 1</math>.</p> <p>Gesucht sind Näherungen der Zahl <math>\pi</math> mit <math>c &lt; 1</math>.</p>	
ι 36	Dr. Friedhelm Götze, Jena
<p>Gegeben sei eine Kugel <math>K</math> mit Radius <math>r</math>. Unter allen geraden Pyramiden mit quadratischer Grundfläche (Grundkante <math>a</math>, Pyramidenhöhe <math>h</math>), welche <math>K</math> so umschließen, dass ihre fünf Begrenzungsflächen die Kugel tangieren, finde man jene mit dem kleinsten Rauminhalt.</p> <p>Man weise außerdem nach, dass genau diese Pyramide unter allen anderen auch die kleinste Oberfläche besitzt.</p>	

## Impressum

Die  $\sqrt{\text{WURZEL}}$  ist eine Zeitschrift für Mathematik.

### Herausgeber

Wurzel – Verein zur Förderung der Mathematik an Schulen und Universitäten e.V.

### Mitarbeiter an dieser Ausgabe

Thomas Fischer (V.i.S.d.P.), Michael Heerdegen, Elke Mäurer,  
Stefan Möbius, Thomas Schneider, Konrad Schöbel

### Anschrift

Wurzel, FSU Jena, Fakultät für Mathematik und Informatik, 07740 Jena

**Telefon:** (03641) 9 46 006

**e-Mail:** [redaktion@wurzel.org](mailto:redaktion@wurzel.org)

**URL:** <http://www.wurzel.org>

Die  $\sqrt{\text{WURZEL}}$  erscheint monatlich.

Preise, Bezugsbedingungen und Bestellung unter <http://www.wurzel.org/service> oder direkt bei der Redaktion.

Diese Jahress Ausgabe darf, elektronisch oder gedruckt, nur **unverändert und vollständig** weitergegeben werden. Jede andere Verwertung der urheberrechtlich geschützten Inhalte ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Redaktion unzulässig, soweit sich aus dem Urheberrechtsgesetz nichts anderes ergibt.

Für unverlangt eingesandte Manuskripte wird keine Haftung übernommen.