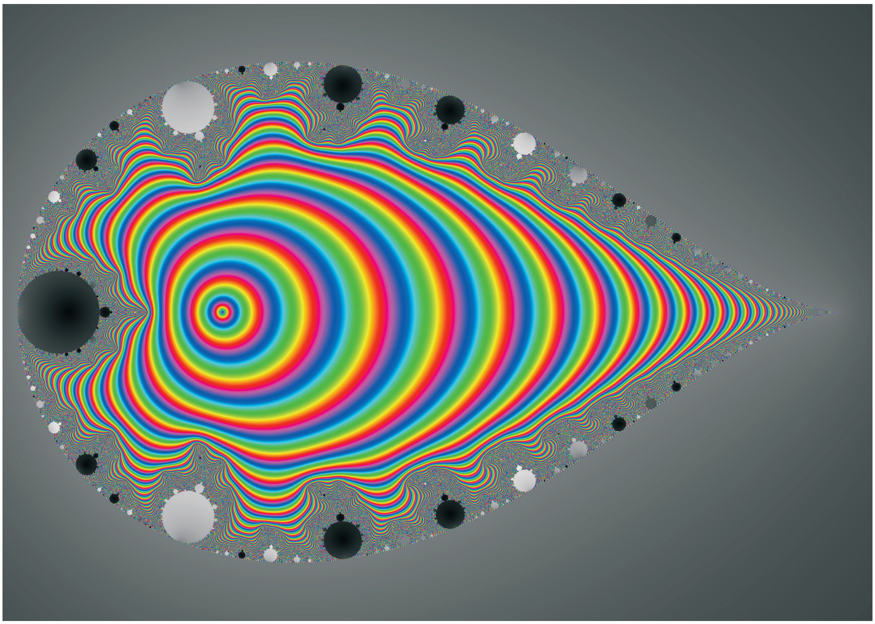
Die WURZEL

Zeitschrift für Mathematik

Verein zur Förderung der Mathematik an Schulen und Universitäten e.V.



Sonderheft 2012 46. Jahrgang

Editorial

Liebe Leserinnen und Leser,

erstmals nach über zehn Jahren erscheint wieder eine Sonderausgabe der $\sqrt{\text{WURZEL}}$. Diesmal wollen wir zusammen mit der Friedrich-Schiller-Universität Jena vor allem Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II ansprechen, die sich gerne mit mathematischen Problemen oder Knobeleien auseinandersetzen und vielleicht noch nicht ganz genau wissen, was sie einmal studieren wollen.

Dieses Heft soll eine Entscheidungshilfe hin zum Mathematik-Studium und besonders natürlich zum Studium in Jena sein. Es vereint daher Artikel zur Anwendung mathematischer Theorien (hier zu Sortiernetzen), einen Überblick über die Geschichte der Mathematik in Jena, interessante Knobeleien und Aufgaben sowie Berichte ehemaliger Mathematik-Studenten, die heute in der freien Wirtschaft tätig sind. Und wer gerne wissen möchte, was unser Titelbild mit Mathematik zu tun hat und wie die Theorie dahinter andere Disziplinen der Wissenschaft beeinflusst, dem kann man ein Mathematik-Studium nur wärmstens empfehlen.

Im Namen der $\sqrt{\text{WURZEL}}$ und der Fakultät für Mathematik und Informatik der FSU Jena möchten wir uns beim Bundesministerium für Bildung und Forschung, das diese Sonderausgabe finanziell unterstützt hat, bedanken.

Wir wünschen Ihnen viel Freude bei der Lektüre sowie der Beschäftigung mit den Problemen und Aufgaben dieses Heftes und hoffen, Ihre Begeisterung für die Mathematik so zu unterstützen oder zu verstärken, dass Sie der Mathematik auch nach Ihrer Schulzeit erhalten bleiben.

Tim Fritzsche

Über $^{\text{Die}}\sqrt{\text{WURZEL}}$ und den Wurzel e. V.

von Daniel Kilian, Jena

Der Wurzel e. V. zur Förderung der Mathematik an Schulen und Universitäten geht zurück auf ein Gemeinschaftsprojekt, das 1964 an der thüringischen Universität Jena ins Leben gerufen wurde und 1967 von Hansgeorg Meißner mit der Zeitschrift $^{\text{Die}}\sqrt{\text{WURZEL}}$ seinen Namen bekam.

Unser Redaktionsteam besteht größtenteils aus Studenten, die in ihrer Freizeit die Artikel und Aufgaben auswählen, erstellen oder korrigieren. Das bedeutet, dass unsere Belegschaft nach sechs Jahren fast vollständig ausgewechselt ist (nach dem Umstieg auf Bachelor- und Master-Studiengänge möglicherweise bald schon nach drei Jahren).

Die Zeitschrift erscheint monatlich und richtet sich an alle mathematisch Interessierten, insbesondere Schüler der höheren Klassen, Lehrer und Studenten. Sie beinhaltet Artikel zu mathematischen oder informatischen Problemstellungen, Informationen zu Wettbewerben, Rezensionen von Fachliteratur und Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit. Die Beiträge stammen von den Redakteuren sowie von Schülern, Lesern oder Professoren.

Neben der Zeitschrift veranstalten wir bereits seit 1965 zweimal jährlich eine acht- bzw. zehntägige Ferienfreizeit zur Begabtenförderung in den Jahrgangsstufen 8–12 in Thüringen (die Schülerakademie Mathematik), durch die uns jedes Jahr einige der neuen Studenten schon näher kennen. Das hat sich für das Überleben der Zeitschrift als entscheidend erwiesen, da aufgrund des vergleichsweise schnellen Wechsels im Redaktionsteam ständig auch die Nachfolge gesichert werden muss.

Abb. 1 Ein Blick ins √WURZEL-Büro

Für den richtigen Eindruck sei hier gesagt, dass solche Ferienlager in der DDR sehr verbreitet und alle Aktivitäten der √WURZEL staatlich gefördert waren. Nach der Wende war dann schnelles Handeln gefragt – durch Gründung des Vereins und etwas Unterstützung von außen konnten wir schließlich unser Bestehen sichern.

Unter großem Andrang fand in diesem Jahr zum ersten Mal auch eine Schülerakademie Mathematik für die Klassen 5–7 statt. Nach dem Motto „Wenn die Betreuer sich darauf einigen zu zelten, reichen die Zimmer im Schullandheim.“ hatten schließlich alle eine schöne Woche.

Abb. 2 Die erste Schreibmaschine und die erste Ausgabe der √WURZEL

Über lange Zeit war das Erstellen der Hefte mit sehr viel Aufwand verbunden (Bild links), bis Anfang der 90er Jahre dann mit dem Textsatzsystem LaTeX[1] alles sehr viel einfacher wurde. Zwischenzeitlich wurde die Wurzel auf einer selbstgebauten Schreibmaschine mit kyrillischen und griechischen Buchstaben geschrieben, um sich deren nachträgliches Eintragen per Hand zu ersparen. Bisher haben wir es so zu fast 500 Ausgaben gebracht, dieses Sonderheft ist die 499.

[1]Für Schüler, z. B. für Facharbeiten, nicht uninteressant: LaTeX erstellt Inhaltsverzeichnis, Fußnoten, Literatur-, Quellen- oder Grafikverzeichnis ohne viel Zutun von selbst. Die Bedienung ähnelt dabei der einer Programmiersprache, wobei aus den in der Quelltextdatei enthaltenen Befehlen ein pdf-Dokument generiert wird.

Sortiernetze

von Thomas Fischer, Aalen

Sortiernetze sind eigentlich nur eine etwas andere Betrachtungsweise spezieller Sortierverfahren – dennoch sind sie mathematisch und aus technischer Sicht interessant. Technisch deshalb, weil bei paralleler Ausführung unabhängiger Operationen Sortiernetze schneller sind als klassische sequentielle Sortierverfahren. Mathematisch bieten Sortiernetze vielerlei Anwendungsmöglichkeiten elementarer Beweistechniken und sind so insbesondere für Schüler gut zugänglich.

1 Sequentielle vergleichsbasierte Sortierverfahren

Ein Sortierverfahren ist ein Algorithmus, welcher beispielsweise die Elemente einer endlichen Zahlenfolge $a_1, \ldots, a_n$ in die richtige Reihenfolge bringt. Um dies zu erreichen, müssen Elemente verglichen werden. Im Programm sieht das ungefähr so aus: WENN $a_i \leq a_j$ DANN ... SONST ...

Dabei gibt es vielfältige Möglichkeiten, welche Aktionen ein Sortieralgorithmus innerhalb und außerhalb solcher Vergleichsabfragen ausführt. Die Analyse aller Sortierverfahren ist jedoch ein Thema für sich. Wir wollen hier nur ein wichtiges Ergebnis festhalten: Alle vergleichsbasierten Sortierverfahren benötigen im Mittel (über alle Permutationen der Eingabe) mindestens $\frac{n}{2}\log_2(\frac{n}{2})$ viele Vergleichsoperationen, wobei n die Anzahl der zu sortierenden Elemente charakterisiert [3]. Bei sequentieller Ausführung (d. h. ohne Parallelisierung) ist dies eine untere Schranke für die mittlere Laufzeit. Es gibt einen ganzen Zoo von Verfahren, die diese Schranke (bis auf einen konstanten Faktor) tatsächlich erreichen.

Wir wollen ab jetzt nur noch Sortierverfahren betrachten, die als einzige Aktion nach dem Vergleich das Tauschen der betreffenden Elemente beinhalten: WENN $a_i \leq a_j$ DANN TAUSCHE(a_i, a_j). Solche Verfahren nennen wir **datenunabhängig**, denn der Programmablauf kann nicht durch die Eingabereihenfolge der Daten beeinflusst werden. Trotz dieser Beschränkung gibt es datenunabhängige Sortierverfahren, die die o. g. Laufzeitschranke annehmen. Insbesondere ist die Laufzeit (genauer: Zahl der VERGLEICHE-TAUSCHE-Operationen) nicht von der Vorsortierung der Eingabe abhängig.

2 Notationen

Die zu sortierenden Daten sollen aus einer **Grundmenge** X mit einer totalen Ordnungsrelation stammen. D. h., je zwei Elemente aus X sind vergleichbar, insbesondere gelte Transitivität.

Die Folge der zu sortierenden Elemente $(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnen wir als **Eingabe** und die Zahl n der Elemente als **Ordnung**[1] der Eingabe. Die Menge aller Eingaben der Ordnung n sei, wie üblich, mit X^n bezeichnet.

Elementarer Bestandteil der Sortiernetze ist die oben beschriebene VERGLEICHE-TAUSCHE-Operation. Eine solche Operation nennen wir kurz **Vergleicher**. Ein Vergleicher bringt also zwei Elemente der Eingabe in die richtige Reihenfolge. Es handelt sich um eine Abbildung $\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right] : X^n \to X^n$ mit

$$\left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}(x)\right)_k = \begin{cases} \min(x_i, x_j) & \text{falls } k = i \\ \max(x_i, x_j) & \text{falls } k = j \\ x_k & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall x \in X^n\,.$$

Das Resultat $y = \left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right](x)$ ist wieder eine Folge aus X^n, die wir durch die obige Definition punktweise (d. h. für alle y_k) erklärt haben.

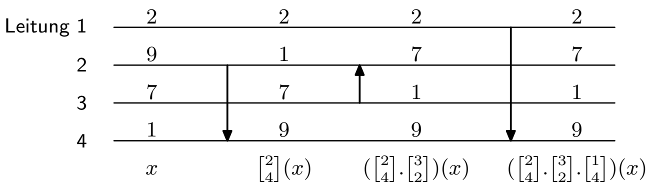
3 Vergleichernetze

Die Hintereinanderausführung mehrerer Vergleicher

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i_2 \\ j_2 \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} i_m \\ j_m \end{bmatrix}$$

nennen wir **Vergleichernetz**. Dabei sei $(f.g)(x) = g(f(x))$, d. h., die Abbildungen werden von links nach rechts notiert, in der Reihenfolge, wie sie ausgeführt werden.

Solche Netze veranschaulichen wir durch horizontale Linien (Datenleitungen) und senkrechte Pfeile (Vergleicher):



Wir stellen uns vor, dass die Daten von links nach rechts laufen und bei jedem Vergleicher werden die Werte vertauscht, falls sie nicht in der gewünschten Reihenfolge (Pfeilrichtung) stehen.

Es ist zu beachten, dass die Reihenfolge der Vergleicher relevant ist. Beispielsweise sind die Netze $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right].\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right].\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ verschieden.

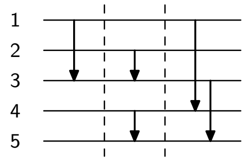
[1] Der Begriff Ordnung hat hier nichts mit Ordnen im Sinne von Sortieren zu tun.

Haben jedoch aufeinanderfolgende Vergleicher keine gemeinsamen Pfeilenden, sind sie **unabhängig**:

$$\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right] \text{ und } \left[\begin{smallmatrix} k \\ l \end{smallmatrix}\right] \text{ unabhängig} :\Leftrightarrow \ i, j, k, l \text{ paarweise verschieden.}$$

Unabhängige Vergleicher sind vertauschbar.

Aufeinanderfolgende paarweise unabhängige Vergleicher wollen wir nun zu **Vergleicherstufen** zusammenfassen. Alle Vergleicher einer Stufe können dann parallel ausgeführt werden, was die Gesamtlaufzeit erheblich verkürzen kann. Die Zuordnung der Vergleicher zu den Stufen ist jedoch nicht eindeutig, den Vergleicher $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ des Beispiels rechts könnte man auch in die erste Stufe schieben.



3-stufiges Netz

Die Anzahl der Vergleicher sei mit $\#V$ und die Anzahl der Stufen mit $\#S$ bezeichnet, wobei bei der Zählung der Stufen stets eine konkrete Unterteilung mit anzugeben ist.

Zum Abschluss dieses Abschnittes noch folgende Definition: Ein Vergleichernetz heißt **primitiv**, wenn nur benachbarte Elemente verglichen werden, d. h., alle Pfeile haben die Länge 1.

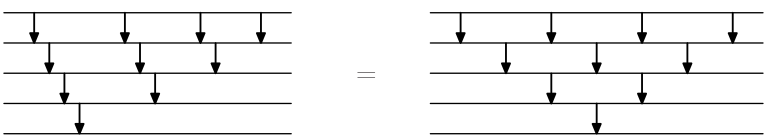
4 Sortiernetze

Wenig überraschend wollen wir unter einem **Sortiernetz** ein Vergleichernetz verstehen, welches alle Eingaben korrekt sortiert.

Eine Möglichkeit zur Konstruktion von Sortiernetzen besteht darin, sich ein datenunabhängiges Sortierverfahren herzunehmen und alle darin vorkommenden Vergleichsoperationen von links nach rechts in ein Netz einzutragen.

Beispiel: Bubble-Sort

Beim Sortierverfahren Bubble-Sort werden zunächst die ersten beiden Elemente verglichen und ggf. durch Tauschen in die richtige Reihenfolge gebracht. Das Gleiche macht man mit dem zweiten und dritten, dritten und vierten Element usw. Nach einem Durchlauf befindet sich das größte Element an letzter Position. Die restlichen $n-1$ Elemente werden nach demselben Prinzip sortiert. Als Netz sieht das für $n = 5$ wie folgt aus:



Auf der rechten Seite wurde das Netz durch Vertauschen unabhängiger Vergleicher in 7 Stufen unterteilt. Analog kann man dies für beliebiges n durchführen.

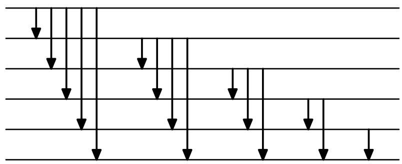
Fazit: Bubble-Sort der Ordnung n ist ein primitives Sortiernetz, bestehend aus $\#V = \frac{n(n-1)}{2}$ Vergleichern und $\#S = 2n-3$ Stufen. Die (unter Berücksichtigung der Parallelisierung) benötigte lineare Laufzeit $2n-3$ wächst langsamer als jene sequentieller Sortierverfahren.

Aufgaben

$\boxed{1}$ Gibt es ein Sortiernetz der Ordnung $n = 4$, welches nur aus 5 Vergleichern besteht?

$\boxed{2}$ Zeige: Ein primitives Sortiernetz benötigt mindestens $\frac{n(n-1)}{2}$ Vergleicher und für $n > 2$ mindestens n Stufen.

$\boxed{3}$ Das Verfahren Selection-Sort sucht sich zunächst das kleinste Element und tauscht es an die erste Stelle. Die restlichen Elemente werden analog sortiert. Das Netz sieht also wie folgt aus:



Bestimme die Anzahl der Vergleicher und Stufen, wobei das Netz analog zu Bubble-Sort möglichst günstig arrangiert werden soll.

5 Das 0-1-Prinzip

Leider ist es gar nicht so einfach, zu entscheiden, ob ein gegebenes Vergleichernetz ein Sortiernetz ist. Der folgende Satz gibt uns für Korrektheitsbeweise zumindest eine angenehme technische Vereinfachung an die Hand.

Satz (0-1-Prinzip): Ein Vergleichernetz, welches alle Folgen aus Nullen und Einsen korrekt sortiert, ist ein Sortiernetz.

Bevor wir diesen Satz beweisen, benötigen wir einige Vorüberlegungen. Eine Funktion $f : X \to X$ nennen wir **monoton**, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ gilt. Für monotone Funktionen f gilt

$$f(\min(x_1, x_2)) = \min(f(x_1), f(x_2)) ,$$

wie man durch Fallunterscheidung leicht nachprüfen kann.

Außerdem benötigen wir noch folgendes

Lemma: Sei V ein Vergleichernetz der Ordnung n und $f : X \to X$ eine monotone Funktion. Dann gilt für alle Folgen $x \in X^n$

$$V(f(x)) = f(V(x))\,.$$

Dabei bezeichne $f(x) = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ das elementweise Anwenden von f auf die Folge x.

Beweis: Wir betrachten zunächst einen einzelnen Vergleicher $\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right]$ und berechnen das i-te Element der behaupteten Gleichung:

$$\begin{aligned}\Big(\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right](f(x))\Big)_i &= \min(f(x_i), f(x_j)) = f(\min(x_i, x_j)) \\ &= f\Big(\big(\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right](x)\big)_i\Big) = \Big(f\big(\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right](x)\big)\Big)_i\,.\end{aligned}$$

Analog geht man für das Element j und die Elemente $k \neq i, j$ vor. Da nun f mit jedem einzelnen Vergleicher vertauschbar ist, gilt die behauptete Gleichung auch für das ganze Netz V. $\square$

Nun kommen wir zum

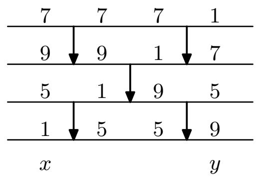
Beweis des 0-1-Prinzips: Wir gehen indirekt vor. Sei V ein Vergleichernetz der Ordnung n und $x \in X^n$ eine Folge, die V nicht sortiert. Dann gibt es auch eine 0-1-Folge, die V nicht sortiert.

Sei also $y = V(x)$ unsortiert, d. h., es gibt ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $y_k > y_{k+1}$. Wir definieren die Funktion $f : X \to \{0, 1\}$ durch

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z < y_k \\ 1 & \text{falls } z \geq y_k\,. \end{cases}$$

Diese Funktion f ist monoton. Außerdem gilt $f(y_k) = 1$ und $f(y_{k+1}) = 0$, d. h., die Folge $f(y)$ ist unsortiert. Wegen $f(y) = f(V(x)) = V(f(x))$ wird die 0-1-Folge $f(x)$ nicht von V sortiert. $\square$

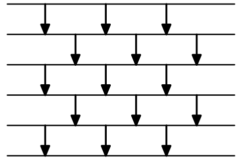
Beispiel: Wir betrachten ein Netz V der Ordnung vier. Die Folge $x = (7, 9, 5, 1)$ wird von V nicht sortiert, denn $y = V(x) = (1, 7, 5, 9)$. Wegen $y_2 > y_3$ gibt es eine Fehlstelle mit $k = 2$. Mit $y_k = y_2 = 7$ ist $f(x) = (1, 1, 0, 0)$ eine 0-1-Folge, die nicht von V sortiert wird.



Ergänzt man das Netz dieses Beispiels um einen weiteren Vergleicher zwischen den beiden mittleren Leitungen, ergibt sich tatsächlich ein Sortiernetz, was wir nun – auf beliebige Ordnung verallgemeinert – zeigen wollen.

Odd-Even-Transposition-Sort

Odd-Even-Transposition-Sort der Ordnung n, kurz OETS(n), ist ein primitives Sortiernetz aus n Stufen, mit allen Vergleichern $\left[{i \atop i+1}\right]$, wobei i abwechselnd alle ungeraden bzw. geraden Indizes aus $\{1, \ldots, n-1\}$ durchläuft. Es besteht aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Vergleichern, vgl. Aufgabe 2.



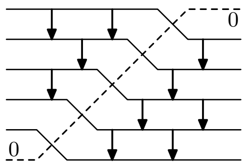
OETS(6)

Um zu zeigen, dass OETS(n) jede Folge $x \in X^n$ korrekt sortiert, gehen wir induktiv vor. Für $n = 1$ ist die Sache klar, wobei wir uns nicht daran stören wollen, dass für $n < 3$ das Netz leere Stufen enthält. Außerdem wenden wir das 0-1-Prinzip an, d. h., es genügt $x \in \{0,1\}^n$ zu betrachten. Wir unterscheiden zwei Fälle

1. Fall: $\boldsymbol{x_n = 1}$. Die Vergleicher $\left[{n-1 \atop n}\right]$ sind wirkungslos, da das größte Element schon ganz unten steht. Die verbleibenden Vergleicher der ersten $n-1$ Stufen bilden ein OETS($n-1$), welches nach Induktionsvoraussetzung korrekt sortiert. Die n-te Stufe ist in diesem Fall überflüssig, sie stört aber nicht.

2. Fall: $\boldsymbol{x_n = 0}$. Wir können annehmen, dass die Vergleicher zwei gleiche Elemente stets vertauschen. Dann wandert die Null schrittweise bis ganz nach oben. D. h., wir können alle Vergleicher der Diagonalen durch Kreuzungen ersetzen.

Ignorieren wir nun die gestrichelte Linie, bilden die restlichen $n-1$ Datenleitungen ein OETS($n-1$), welches nach Induktionsvoraussetzung korrekt sortiert. □

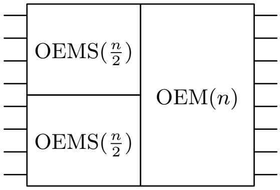


6 Schnelle Sortiernetze

Obwohl die lineare Laufzeit von Bubble-Sort bzw. Odd-Even-Transposition-Sort kürzer ist als die von sequentiellen Sortierverfahren, stellt sich die Frage, ob es nicht noch schneller geht. Da ein Sortieralgorithmus (bzw. -netz) mindestens $\frac{n}{2}\log_2(\frac{n}{2})$ Vergleiche(r) braucht und sich pro Stufe maximal $\frac{n}{2}$ Vergleicher unterbringen lassen, ist $\log_2(\frac{n}{2})$ eine untere Schranke für die Zahl der Stufen. Wir werden nun ein Sortiernetz vorstellen, welches diese Schranke zwar nicht ganz erreicht, aber immerhin sublinear ist.

Odd-Even-Merge-Sort

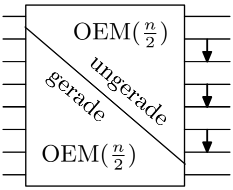
Die Grundidee schauen wir uns vom klassischen Merge-Sort ab [3]. Nach dem Teile-und-Herrsche-Prinzip führen wir das Problem auf zwei halb so große Instanzen zurück und vereinigen im Anschluss die beiden vorsortierten Teilfolgen. Damit die Rekursion gut aufgeht, nehmen wir an, dass n eine Zweierpotenz ist.

$\mathrm{OEMS}(n) =$ 

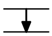
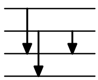
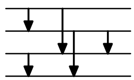
Nebenstehendes Bild zeigt das Rekursionsschema für Odd-Even-Merge-Sort, kurz $\mathrm{OEMS}(n)$.

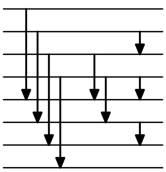
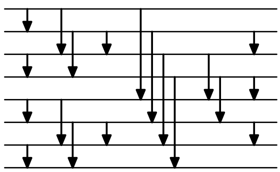
Das eigentliche Problem besteht nun darin, die Verschmelzung (Odd-Even-Merge, kurz $\mathrm{OEM}(n)$) datenunabhängig durchzuführen. Wir nutzen wieder das 0-1-Prinzip. Der Trick ist nun folgender: Teilt man eine sortierte 0-1-Folge (gerader Länge) nach ungeraden und geraden Indizes in zwei Folgen auf, so enthalten beide gleichviele Nullen oder erstere genau eine Null mehr.

Da wir zwei vorsortierte 0-1-Folgen haben, liegen auf den ungeraden Datenleitungen maximal zwei Nullen mehr als auf den geraden. Wir sortieren zunächst die Daten auf den ungeraden bzw. geraden Leitungen separat – dies kann durch einen Merger der halben Ordnung geschehen (Achtung: Rekursion!). Liegen auf den ungeraden Leitungen tatsächlich zwei Nullen mehr, befindet sich nun dazwischen eine gerade Leitung mit einer Eins, welche mit der zweiten Null getauscht werden muss. Weitere Fehlstellungen gibt es nicht. Da wir nicht wissen, wo die besagte Eins vorkommt, benötigen wir zwischen jeder geraden und nachfolgender ungeraden Leitung einen Vergleicher. Das Bild zeigt das Rekursionsschema.

$\mathrm{OEM}(n) =$ 

Beispiele:

$\mathrm{OEM}(2) = \mathrm{OEMS}(2) =$  $\mathrm{OEM}(4) =$  $\mathrm{OEMS}(4) =$ 

$\mathrm{OEM}(8) =$  $\mathrm{OEMS}(8) =$ 

Anzahl der Stufen:

Die Anzahl der Stufen berechnen wir aus dem Rekursionsschema. Für den Merger gilt zunächst $\#S_n^{\text{OEM}} = \#S_{n/2}^{\text{OEM}} + 1$ und $\#S_2^{\text{OEM}} = 1$. Damit ergibt sich

$$\#S_n^{\text{OEM}} = \log_2 n\,.$$

Für das Sortiernetz haben wir die Rekursion

$$\#S_n^{\text{OEMS}} = \#S_{n/2}^{\text{OEMS}} + \#S_n^{\text{OEM}} = \#S_{n/2}^{\text{OEMS}} + \log_2 n$$

mit $\#S_2^{\text{OEMS}} = 1$.

Mit der Substitution $m := \log_2 n$ und $x_m := \#S_n^{\text{OEMS}}$ transformiert sich dies in $x_m = x_{m-1} + m$ mit $x_1 = 1$. Also ist

$$x_m = m + (m-1) + \ldots + 1 = \frac{(m+1)m}{2}$$

und somit

$$\#S_n^{\text{OEMS}} = \frac{1}{2}(1 + \log_2 n)\log_2 n\,.$$

Odd-Even-Merge-Sort hat damit – wie versprochen – tatsächlich eine sublineare Laufzeit, nämlich von der Größenordnung $O(\log(n)^2)$. Die Anzahl der Stufen und Vergleicher zeigt folgende Tabelle.

n	2	4	8	16	32	64	128	1024	1048576
$\#S_n^{\text{OEMS}}$	1	3	6	10	15	21	28	55	210
$\#V_n^{\text{OEMS}}$	1	5	19	63	191	543	1471	24063	100663295

Aufgabe

$\boxed{4}$ Man leite eine explizite Formel für die Anzahl $\#V_n^{\text{OEMS}}$ der Vergleicher von Odd-Even-Merge-Sort her.

Literatur

[1] D. E. Knuth: *The Art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and Searching.* 3rd ed., Addison-Wesley, 1998.

[2] H. W. Lang: *Algorithmen in Java.* 2. Auflage, Oldenbourg, 2006. www.iti.fh-flensburg.de/lang/algorithmen/sortieren/networks/sortier.htm

[3] R. Tandetzky: *Sortieralgorithmen.* √WURZEL, Heft 11/2010.

Knobelecke – Ameisenparade

Aufgabe

Auf einem 1 Meter langen Brett befindet sich eine Ameisenfamilie, bestehend aus einhundert Tieren, von denen sich jede zu Beginn entweder nach links oder nach rechts bewegt. Alle Ameisen bewegen sich mit einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Minute. Begegnen sich zwei Tiere, dann wechseln beide ihre Richtung und bewegen sich wieder voneinander weg. An den Enden des Brettes fallen sie einfach herunter.

Wie lange dauert es höchstens, bis die letzte Ameise vom Brett heruntergefallen ist? Man gebe eine entsprechende Startverteilung mit Position und Richtung der Ameisen an.

Lösung

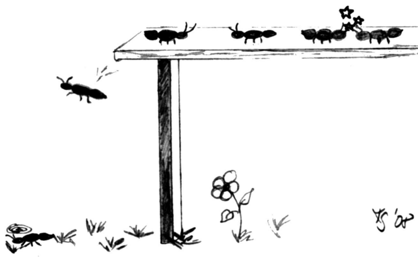


Bild: Kathrin Stoll

Im Laufe der ersten Minute passierte es, dass sich zwei Ameisen-Zwillinge trafen. Ein Beobachter, der die beiden nicht unterscheiden konnte und einen Moment lang nicht ganz genau hingeschaut hatte, rief danach: „He, ihr habt gar nicht eure Richtung gewechselt, ihr seid einfach aneinander vorbei gelaufen.“ Die Zwillinge versuchten, ihre „Unschuld“ zu beweisen, mussten aber feststellen, dass man bei völlig gleich aussehenden Ameisen nicht unterscheiden kann, ob zwei Ameisen beim Aufeinandertreffen ihre Richtung wechseln, oder ob sie aneinander vorbeilaufen.

Mit dieser Beobachtung wurde die Aufgabe der Ameisenparade ziemlich einfach. Für den „nicht ganz so genau hinschauenden“ Beobachter wandern die Ameisen einfach aneinander vorbei, ohne sich zu beeinflussen. Da das Brett nur einen Meter lang ist – eine Strecke, die die Ameisen in einer Minute zurücklegen –, ist die letzte Ameise spätestens nach einer Minute vom Brett gefallen. Die volle Minute wird dann und nur dann gebraucht, wenn zu Beginn eine der Ameisen am linken bzw. rechten Ende des Brettes steht und nach rechts bzw. links läuft. Die Positionen und Laufrichtungen aller anderen Ameisen sind dabei unerheblich.

Eine weitere Frage, die sich anschließt, ist, wie viele Zusammenstöße maximal passieren können. Das lässt sich so beantworten: Um die Zahl der

Zusammenstöße (einfacher Vorbeigänge) zu maximieren, muss man alle anfangs nach rechts laufenden Ameisen links positionieren und alle anfangs nach links laufenden Ameisen rechts positionieren. Dann gibt es aber bei n Ameisen, von denen k anfangs nach links laufen, $k \cdot (n-k)$ Zusammenstöße (Vorbeigänge). Die Frage reduziert sich also auf die Aufgabe, $k \cdot (n-k)$ für festes n zu maximieren. Das Maximum wird bekanntlich bei $k = \frac{n}{2}$ angenommen (bzw., um in den ganzen Zahlen zu bleiben, bei $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$). Es gibt also maximal $\frac{n^2}{4}$ Zusammenstöße und in unserem konkreten Beispiel sind es maximal 2500.

Preisaufgabe – Wer knobelt so spät durch Nacht und Wind?

Die zweite Knobelaufgabe drucken wir ohne Lösung ab – denn wir wollen, dass der Leser knobelt und hoffentlich eine Lösung ermittelt. Um einen Anreiz zum Lösen zu geben, verlosen wir unter allen richtigen Einsendungen zufällig und gleichverteilt die folgenden Preise:

Platz 1: Ein $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Abo für das Jahr 2013

Platz 2: Ein $\sqrt{\text{WURZEL}}$-T-Shirt

Platz 3: Eine $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Kaffeetasse

Richtige Lösungen können wahlweise per Mail an **redaktion@wurzel.org** unter dem Betreff **Preisaufgabe** oder per Post (inkl. Absender) an die Adresse auf der Rückseite des Sonderheftes gesendet werden. Der Einsendeschluss ist der 01. 12. 2012. Die Preisträger werden von uns im Nachhinein benachrichtigt. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.

Aufgabe

Es ist eine stürmische, kalte Nacht. Nur ab und zu scheint der Vollmond zwischen den dichten Baumkronen hindurch und erhellt den Weg. Mit angestrengtem Blick versucht der Fluchtwagenfahrer den Weg vor sich im schwachen Lichtkegel der Scheinwerfer zu erkennen. Alles war perfekt geplant: eine abgelegene Villa, die Bewohner verreist, die zehn identischen, unschätzbar wertvollen Diamanten somit leicht zugänglich, nur durch einen Tresor geschützt.

Ein Handlanger wurde als Butler eingeschleust. In dieser Rolle konnte er das Gelände genau studieren, Grundrisse des Gebäudes besorgen, den Tresor-Code ausspionieren und eine Kopie des Hausschlüssels anfertigen. Alle Möglichkeiten wurden in Gedanken durchgespielt, doch nun sitzt ihnen die Polizei im Nacken. Damit hatten sie nicht gerechnet. Denn der Polizei ist es gelungen, die Diebesbande zu infiltrieren und so über deren Absichten informiert zu sein.

Plötzlich peitschen Schüsse durch die Nacht. Der Fahrer verliert die Kontrolle über den Fluchtwagen: „Mist, die haben den Reifen erwischt“. Er muss bremsen und schafft es gerade noch, vor dem Baum zum Stehen zu kommen. Das Adrenalin schießt durch die Adern der fünf Insassen, jeder Muskel ist angespannt, im Hintergrund das Geräusch der näher kommenden Polizeiwagen. Nun heißt es: Improvisieren! Die Diebe haben nur eine Chance. Sie müssen die Diamanten unter sich aufteilen und auf verschiedenen Fluchtwegen ihr Glück versuchen, um wenigstens einen Teil der Beute zu retten.

So viele Möglichkeiten, zu viele Möglichkeiten, die Beute zu teilen. Sie haben keine Zeit, alle Möglichkeiten zu durchdenken, dafür sind ihnen die Polizisten zu dicht auf den Fersen. Jeder Dieb fasst in den Beutel mit den Diamanten und nimmt so viel, wie er gerade greift, an sich. Dann verlassen sie den Wagen, suchen in verschiedenen Richtungen das Weite und verschwinden in der Dunkelheit.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die zehn identischen Diamanten auf die fünf Diebe aufzuteilen? (Dabei ist es unter anderem möglich, dass ein Dieb alle zehn Diamanten bekommt und alle anderen Diebe keinen Diamanten.)

Papierfaltungen

von Frank Aurzada, Berlin

Viele mathematische Theorien drehen sich um das Falten von Papier. Auch in der $\sqrt{\text{WURZEL}}$ ging es schon um das Thema Origami. In diesem Artikel beschäftigen wir uns jedoch mit einem viel einfacheren Thema. Man nehme ein Stück Papier und falte es genau in der Hälfte.

Der erste Eindruck wird wohl sein: Na und? Es ergibt sich ein Stück Papier der halben Länge bzw. Breite, aber im Prinzip kann man damit beliebig lange fortfahren. Weiteres Falten zeigt, dass dies nicht so ist. Das Papier wird sehr schnell dicker durch die vielen Lagen. Man sieht sofort ein, dass sich genau genommen die Dicke des Papiers in jedem Schritt verdoppelt. Ist die Dicke des Ausgangspapiers d, so hat das Papier nach n Faltungen die Dicke $2^n d$. Das Wachstum der Dicke ist also exponentiell.

Faltet man weiter, so wird man irgendwann – vielleicht nach sechs bis sieben Schritten – feststellen, dass das Papier schon nicht mehr schön gefaltet ist und dass man es auch nicht weiter vollständig falten kann. Unser Ziel ist es zu berechnen, wie viele Faltungen man mit einem Papier vorgegebener Länge ausführen kann oder aber, was äquivalent ist, wie lang ein Papier sein muss, damit wir es n-mal falten können. Der Einfachheit halber werden wir das Papier immer nur in eine Richtung falten, sodass nur die Ausgangslänge und nicht die -breite eine Rolle spielt.

Die genaue mathematische Beschreibung ist nicht schwierig. Überraschend ist daher, dass sie erst 2001 von Britney Gallivan geliefert wurde, damals Schülerin an einer High School in den USA. Sie trat auch den empirischen Beweis ihrer Rechnungen an, indem sie ein 1 200 m langes Stück Toilettenpapier zwölfmal faltete.

Für praktische Experimente ist aber eher Goldpapier (Dicken im Bereich 10^{-4} bis 10^{-2} mm) oder fürs Erste, aus ökonomischen Gründen, eine große Tageszeitung (Papierdicke ist im Bereich 10^{-1} mm) zu empfehlen. (*Bitte nicht mit der $\sqrt{\text{WURZEL}}$ probieren!*)

Nun wollen wir das folgende Resultat beweisen.

Satz 1. *Um ein Stück Papier der Dicke d in eine Richtung n-mal zu falten, muss seine Länge mindestens*

$$\frac{\pi d}{6}\,(2^n+4)(2^n-1)$$

betragen.

Beweis. Betrachten wir zunächst, was beim einfachen Falten eines Papierstücks passiert. Die erste Beobachtung ist die, dass sich die Dicke des Papiers verdoppelt. Weiterhin stellen wir fest, dass sich die Länge des Papiers ungefähr halbiert. Ungefähr deswegen, weil ein kleiner Teil des Papiers im Falz „verschwindet“. Wir werden sehen, dass dies nicht nur ein kleiner Teil ist, sondern dass dieser Anteil dafür verantwortlich ist, dass wir das Papier irgendwann nicht mehr werden falten können.

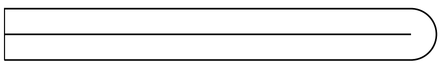


Abb. 1 Erste Faltung

Nun betrachten wir den Vorgang etwas genauer. Falten wir das Stück Papier einmal, so ergibt sich ein Halbkreis mit Radius d am Falz. Dieser Halbkreis hat den Umfang πd. Wir vereinbaren, dass wir das Stück dieses Halbkreises nicht für die nächste Faltung verwenden werden, sondern nur das wirklich nun in zwei parallelen Lagen aufeinanderliegende Papier. Diese Vereinbarung ist insbesondere bei den späteren Faltungen praktisch völlig verständlich und vereinfacht die Rechnungen. Von der Gesamtlänge sind nun also πd im Falz „verbraucht“. Außerdem ergibt sich ein Papier der Dicke $2d$.

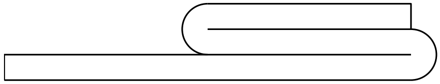


Abb. 2 Zweite Faltung, erste Lage

Nun falten wir das Papier ein zweites Mal. Dabei falten wir zuerst die obere Lage. Auch hier ergibt sich ein „Verlust“ durch den Falz. Dieser hat wieder die Länge πd. Beim Falten der zweiten Lage verbraucht man sogar $2\pi d$ an Papier, da die zweite Lage um die erste herumgelegt werden muss.

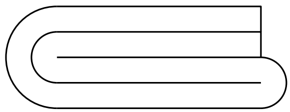


Abb. 3 Zweite Faltung, zweite Lage

Genauso muss im i-ten Faltungsschritt verfahren werden. Man hat dann schon 2^{i-1} Lagen aus den vorigen Faltungen, die nun alle wieder gefaltet werden müssen. Dabei verbraucht die j-te Lage $j\pi d$ an Länge für den Falz. Insgesamt verbraucht man also in der i-ten Faltung

$$V_i = \sum_{j=1}^{2^{i-1}} j\pi d = \pi d \sum_{j=1}^{2^{i-1}} j = \frac{\pi d}{2} 2^{i-1}(2^{i-1}+1)\,,$$

wobei wir im letzten Schritt die Gaußsche Summenformel

$$\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k}{2}(k+1)$$

verwendet haben.

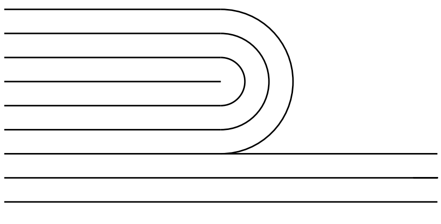


Abb. 4 verschiedene Lagen bei einer beliebigen Faltung

Berechnen wir nun den „Verlust“ in n Faltungen zusammen. Dieser ergibt sich als Summe über die „Verluste“ in allen Faltungen

$$\begin{aligned} L = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi d}{2} 2^{i-1}(2^{i-1}+1) &= \frac{\pi d}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(2^{2(i-1)} + 2^{i-1}\right) \\ = \frac{\pi d}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(4^i + 2^i\right) &= \frac{\pi d}{2} \left(\frac{4^n-1}{4-1} + \frac{2^n-1}{2-1}\right) \\ = \frac{\pi d}{2\cdot 3}\left(4^n - 1 + 3\cdot 2^n - 3\right) &= \frac{\pi d}{6}\left(2^n+4\right)\left(2^n-1\right). \end{aligned}$$

Dies ist also der Teil des Papiers, der in n Faltungen im Falz „verschwindet“. Man braucht also mindestens diese Länge des Papiers, um überhaupt n-mal falten zu können, was genau die Aussage unseres Satzes ist. Im fünften Schritt der letzten Rechnung haben wir die Formel

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n-1}{q-1}$$

verwendet, welche für alle natürlichen Zahlen n und reellen Zahlen $q > 0$ gilt. Diese Formel lässt sich durch vollständige Induktion beweisen. Intuitiv kann man sie sich am besten veranschaulichen, indem man sie mit $(q-1)$ multipliziert:

$$(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} q^i = q(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) - (1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) = q^n - 1. \quad \square$$

Man kann sich nun fragen, was passiert, wenn man ein Stück Papier nicht nur in eine Richtung faltet, sondern in zwei Richtungen. Dabei „spart“ man natürlich etwas, da der „Verlust“ in beiden Richtungen des Papiers unterkommt. Letztlich ergibt sich aber auch hier ein Wachstum des Verlustes, das linear von der Dicke des Papiers und exponentiell von der Anzahl der Faltungen abhängt.

Noch eine Bemerkung zum Abschluss: Die Verdopplung der Dicke des Papiers (bzw. Folie o. Ä.) kann benutzt werden, um die ursprüngliche Dicke zu messen. Ist diese nämlich so gering, dass sie nicht mit normalen Methoden „messbar“ ist, so wird das Papier so lange gefaltet oder es werden so lange Lagen des Papiers übereinander gestapelt, bis die Dicke im messbaren Bereich liegt. So kann man beispielsweise die Dicke des normalen Kopierpapiers bestimmen: Wenn ein Stapel 500 Blatt enthält und ca. 5 cm hoch ist, dann müssen die einzelnen Papierblätter die Dicke 0,1 mm haben.

Literatur

[1] **http://en.wikipedia.org/wiki/Britney_Gallivan** (abgerufen am 04. 06. 08)

[2] **http://mathworld.wolfram.com/Folding.html** (abgerufen am 04. 06. 08)

Berufs-Check Mathematiker

von Markus Lilienthal, Nürnberg

1 Mathe? – Mathe!

Immer wieder werde ich als Mathematiker von Absolventen gefragt, wie man sich ein Mathematikstudium vorstellen kann, was man mitbringen muss und was man später einmal beruflich damit machen kann, wenn man nicht gerade Lehrer werden möchte. (Dabei hat ausgerechnet das Lehramt separate Studiengänge ...)

Wir wollen einmal das Augenmerk auf das reine Mathematikstudium richten. Das Spektrum der möglichen Betätigungsfelder ist bei genauerer Betrachtung sehr breit gefächert, und es gibt eigentlich kein einheitliches Berufsbild. Fast jeder Industriezweig, aber auch fast jede andere Wissenschaft bedient sich heute zunehmend ausgefeilter mathematischer Methoden. Dort, wo dies besonders ausgeprägt ist, finden sich entsprechend auch die wenigen häufig genannten klassischen Mathematikerdomänen: Banken, Versicherungen und statistische Institute.

Wir haben zwei Alumni der Universität Jena aufgestöbert und sie gefragt, was sie heute als Mathematiker machen und wie sie auf die Zeit des Studiums zurückblicken. Ich selbst habe mich diesem „Berufscheck" als Dritter angeschlossen. Wer mehr über das Mathematikstudium erfahren möchte, vielleicht sogar in Jena, ist herzlich eingeladen, den Kontakt zur $\sqrt{\text{WURZEL}}$ oder den Fachschaften zu suchen, wo ältere Studenten gerne Fragen beantworten und Hilfe anbieten.

2 Forschung und Lehre an der Uni

Christoph Thäle aus Osnabrück ist dem Universitätsleben treu geblieben. Er ist wissenschaftlicher Mitarbeiter der dortigen Universität.

Warum hast du dich ursprünglich entschieden, Mathematik zu studieren?

Dass ich Mathematik studieren wollte, stand für mich schon während der Schulzeit fest. Dort hatte ich einen erweiterten und vertieften Mathematikunterricht und wurde während Projekt- und Seminarfacharbeiten von einem sehr engagierten emeritierten Mathematikprofessor betreut. Das hat mich schon früh für dieses Fach begeistert und mir die Wahl meiner Studienrichtung erleichtert.

Was war im Studium dann besonders spannend, motivierend oder überraschend?

Während des Mathematikstudiums fand ich es interessant zu sehen, wie zunächst sehr unvereinbare Fachrichtungen wie Zahlentheorie und komplexe Analysis oder Funktionalanalysis und Wahrscheinlichkeitstheorie miteinander verknüpft sind. Fasziniert haben mich (und faszinieren mich bis heute) immer sogenannte Negativresultate, wie die Gödelschen Unvollständigkeitssätze, aber auch die verblüffende Tatsache, dass es unmöglich ist, ein Quadrat in eine ungerade Anzahl flächengleicher Dreiecke zu zerlegen.

Welche Spezialisierung hast du im Studium eingeschlagen?

Nach den üblichen Grundvorlesungen habe ich versucht, ein möglichst breites Spektrum an Vorlesungen und Seminaren aus ganz unterschiedlichen mathematischen Fachrichtungen zu besuchen. Letztendlich spezialisiert habe ich mich in der fraktalen stochastischen Geometrie, einem Gebiet an der Schnittstelle zwischen Geometrie, Wahrscheinlichkeitstheorie und Maßtheorie, wo die geometrischen Eigenschaften von nichtglatten zufälligen Mengen untersucht werden – jeder hat sicherlich die Bilder des Börsenbarometers vor Augen, welches oft durch die sogenannte geometrische Brownsche Bewegung modelliert wird. Im Bereich der fraktalen Geometrie habe ich auch meine Diplomarbeit geschrieben, weil es mich besonders gereizt hat, verschiedene mathematische Disziplinen miteinander verknüpfen zu können.

Und heute: Wie sieht deine aktuelle Tätigkeit aus?

Seit 2010 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe Stochastik an der Universität Osnabrück beschäftigt. Meine Tätigkeit liegt dort hauptsächlich im Bereich der Forschung, wo ich verschiedene Problemstellungen mit anderen Fachkollegen bearbeite und deren Lösungen auf Fachtagungen präsentiere bzw. in Fachzeitschriften publiziere. Darüber hinaus habe ich zwei Semesterwochenstunden Lehrverpflichtungen (Übung, Seminar oder Vorlesung). Außerdem betreue ich Abschlussarbeiten unserer Stochastikstudenten.

Wie bist du zu deiner jetzigen Tätigkeit gekommen?

Nach dem Studium in Jena habe ich eine Assistentenstelle an der Université de Fribourg in der Schweiz angenommen und dort 2010 meine Promotion abgeschlossen. Während dieser Zeit konnte ich etliche Fachtagungen besuchen und auf diesem Wege andere Kollegen aus meinem Fachgebiet kennenlernen, so auch den Leiter der AG Stochastik in Osnabrück, der mich nach meiner Promotion in seiner Arbeitsgruppe eingestellt hat.

Wie verknüpft sich das Mathematikstudium mit deiner Tätigkeit und deinen Kollegen?

Verschiedene mathematische Probleme müssen auch auf unterschiedlichen Wegen gelöst werden. Ohne eine breite mathematische Allgemeinbildung stehen viele dieser Wege nicht offen. Nicht nur in meiner jetzigen Tätigkeit, sondern auch schon während meiner Promotionszeit hat sehr geholfen, dass ich im Studium (und auch noch danach) versucht habe, mir eine solche mathematische Allgemeinbildung anzueignen.

Zu guter Letzt: Was würdest du einem Studienanfänger auf den Weg geben?

Jedem Studienanfänger möchte ich mit auf den Weg geben, dass die während des Studiums vermittelten und gelernten Inhalte der Werkzeugkasten für das weitere Berufsleben sind. Aus diesem Grund rate ich jedem, ein möglichst breites Vorlesungsspektrum zu besuchen. Nur so kann man später verschiedene Gebiete miteinander verknüpfen und neue Lösungsansätze finden.

3 Wechsel in die Technik

Andrea Weiß aus Stuttgart hat die technische Richtung eingeschlagen: Sie ist Softwareentwicklungs- und Testingenieur.

Warum hast du dich ursprünglich entschieden, Mathematik zu studieren?

Ich habe mich ursprünglich für ein Mathematikstudium entschieden, weil ich gehört hatte, dass die Aussichten auf einen Job sehr gut sind. Ich wollte mir die Arbeit aussuchen, anstatt nur ein Bewerber unter vielen zu werden. Außerdem war ich in der Schule gut in Mathe, sodass ich mir das Studium auch zugetraut habe.

Was war im Studium dann besonders spannend, motivierend oder überraschend?

Am Anfang habe ich befürchtet, an der Programmierung zu scheitern. Ich habe aber schnell gemerkt, dass ich mit Computern gut umgehen kann. Die analytische Denkweise, die man für die Softwareentwicklung und Algorithmen braucht, ist im Studium sehr gefördert worden. Während des Studiums habe ich Beweise eher als notwendiges Übel empfunden. Jetzt denke ich, dass diese logisch stringente Vorgehensweise wichtig und hilfreich ist.

Welche Spezialisierung hast du im Studium eingeschlagen?

Ich habe mich in Optimierung und in Informatik spezialisiert.

Und heute: Wie sieht deine aktuelle Tätigkeit aus?

Meine aktuelle Tätigkeit ist vielseitig. In meinem Unternehmen entwickle ich Software in C# oder teste Hardware (ein Steuergerät) für unsere Kunden. Mein wachsendes mittelständisches Unternehmen hat sich auf den Bereich Automotive, insbesondere Fahrzeugelektronik spezialisiert.

Mein derzeitiges Software-Projekt bearbeite ich selbstständig in unserer Firma. Zum Testen des Steuergeräts bin ich beim Kunden vor Ort (auch in Stuttgart). Ich arbeite mit einigen Kollegen im Team. Wir entwickeln Testsoftware, die Testfälle simulieren. Damit testen wir das Steuergerät in Echtzeit so, als ob es tatsächlich im Fahrzeug verbaut wäre.

Wie bist du zu deiner jetzigen Tätigkeit gekommen?

Nach dem Studium habe ich zuerst in einem wissenschaftlichen Projekt gearbeitet. Danach bin ich zu einem Software-Dienstleister gewechselt. Ich hatte dort interessante Softwareprojekte, bei denen ich viel gelernt und meine Fähigkeiten verbessert habe. Ein Aufhorcher im Vorstellungsgespräch war meine wissenschaftliche Tätigkeit, weil es dort auch um technische Fragen ging.

Wie verknüpft sich das Mathematikstudium mit deiner Tätigkeit und deinen Kollegen?

Ich denke, die Softwareentwicklung ist eines der typischen Berufsfelder für Mathematiker. Ich habe auch in meinem Unternehmen eine Kollegin, die nicht nur ein Softwareprojekt hat, sondern auch schon ein Steuergerät getestet hat. Mathematiker denken analytisch, logisch, strukturiert und präzise. Das macht uns bestens geeignet für solche anspruchsvollen Aufgaben, bei denen der Teufel sehr oft im Detail liegt.

Zu guter Letzt: Was würdest du einem Studienanfänger auf den Weg geben?

Mein Rat an angehende Mathematiker: Vertraut auf eure analytischen Fähigkeiten und eignet euch auch außerhalb der Mathematik Fachwissen an. Ihr solltet unbedingt ein Praktikum machen oder spätestens für die Abschlussarbeit Kontakte zu Unternehmen knüpfen.

4 Mathematik in der Betriebswirtschaft

Ich selbst wohne mittlerweile in Nürnberg und bin Spezialist im Bereich Marktforschung. Bis vor vier Jahren war ich in der $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Redaktion und bei der Schülerakademie Mathematik aktiv.

Warum hast du dich ursprünglich entschieden, Mathematik zu studieren?

Studieren an sich war für mich eigentlich keine Frage. Ich hatte großes Interesse an Mathematik, Informatik und Physik. Ich habe mich dann für Mathematik entschieden, weil man sich sehr flexibel später weiter orientieren kann. Im Nachhinein war die Entscheidung goldrichtig. Meine heutige Spezialisierung kam dann erst später.

Was war im Studium dann besonders spannend, motivierend oder überraschend?

Ansporn war immer das besondere Gefühl, wenn man etwas bewiesen oder herausgefunden hat. Manche mathematischen Probleme oder Sätze haben ganz besondere Eleganz oder regen geradezu zu philosophischen Überlegungen an. Ich denke da z. B. an Berechenbarkeitsprobleme, das Banach-Tarski-Paradoxon oder die Goldbach-Vermutung. Diesen Entdeckungsdrang habe ich mir bewahrt: Auch meine Projekte heute stellen mich immer wieder vor Problemstellungen, deren Lösungen kreative Ansätze erfordern.

Welche Spezialisierung hast du im Studium eingeschlagen?

Meine Vertiefungen waren Stochastik, Informatik und Algebra. Meine Diplomarbeit habe ich in der Algebra geschrieben.

Und heute: Wie sieht deine aktuelle Tätigkeit aus?

Ich arbeite in der Marktforschung als Statistiker. Inhaltlich geht es darum, existierende oder neue Produkte bzw. Dienstleistungen optimal auf die Kunden abzustimmen. Grob gesagt geht es immer wieder um Fragen wie: Welche Eigenschaften soll das Produkt mitbringen? Wie viel darf das Produkt kosten? Gibt es verschiedene Käufergruppen mit verschiedenen Bedürfnissen? Wie kann das Werbebudget optimal zum Einsatz kommen? In der Zeit vor dem Internet wurden solche Entscheidungen mangels Informationen häufig aus dem Bauch heraus getroffen. Heute werden sie zunehmend unter Benutzung mathematischer Methoden getroffen (quantitatives Marketing). Dabei spielen Statistik und Optimierung eine wichtige Rolle.

Viele Fragen lassen sich nicht einfach mit Standardmethoden beantworten, sondern erfordern die Entwicklung neuer Ansätze. Dabei braucht man Programmierkenntnisse, mathematischen Sachverstand, Kreativität in der Problemlösung, Abstraktionsfähigkeit und auch ein gewisses Gespür für die Daten, das man sich über Erfahrungen mit der Zeit aneignet. Bei der Aufbereitung der Ergebnisse besteht die Herausforderung darin, nach all der theoretischen Modellierung das Ergebnis in eine Sprache zu übersetzen, die der jeweilige Auftraggeber, oft große Unternehmen, dann versteht. Insgesamt ist die Arbeit sehr abwechslungreich, weil es immer wieder um neue Projekte geht.

Wie bist du zu deiner jetzigen Tätigkeit gekommen?

Ich hatte eine Promotionsstelle im quantitativen Marketing im Anschluss an das Studium. Im Studium selbst hatte ich keine wirtschaftliche Ausrichtung verfolgt. Insofern musste ich noch einmal viel neu hinzulernen, aber der Wechsel in die neue Fachrichtung verlief insgesamt rückblickend ziemlich gut. Der Wechsel von der Uni ins Unternehmen war dagegen dann recht nahtlos. Ich kann das Gelernte nun direkt anwenden. Zwei Praktika und ein Auslandsaufenthalt waren sicherlich zusätzlich hilfreich für den Sprung in die Praxis.

Wie verknüpft sich das Mathematikstudium mit deiner Tätigkeit und deinen Kollegen?

Ich habe viele Kollegen mit mathematischem Hintergund, oft auch promoviert. Für reine Betriebswirtschaftler ist die Materie meist schon zu komplex.

Ich bin oft auch ein Vermittler zwischen den beiden Fachrichtungen, wenn die Kollegen eine „unterschiedliche Sprache“ sprechen.

Zu guter Letzt: Was würdest du einem Studienanfänger auf den Weg geben?

Freude an der Mathematik sollte als Motivation für ein Mathematikstudium immer mit ganz vorne dabei sein. Allerdings schadet es nicht, während des Studiums auch berufliche Türen außerhalb der reinen Mathematik offenzuhalten, zum Beispiel durch ein Praktikum. Dann fällt der Wechsel in neue Aufgaben nach dem Studium leichter, wenn man nicht an der Uni bleibt.

Zur Geschichte der Mathematik an der Universität Jena – Ein Ort zum Studieren

von Renate Tobies, Jena und Matthias Müller, Jena

Als Jena 1990 in das vereinte Deutschland eintrat, konnte es im Gebiet der Mathematik eine herausragende Institution mit einbringen. Hier lehrten und lehren Mathematiker/innen, die internationalen Ruf genießen. Deshalb ist diese thüringische Universität auch heute noch ein großer Anziehungspunkt für Mathematik-Studierende aus ganz Deutschland und darüber hinaus. Der Beitrag soll einige Schlaglichter auf Entwicklungstendenzen werfen.

1 Zu den Anfängen

Die bereits in Jahre 1558 gegründete Universität in Jena hatte früh wichtige Mathematiker als Professoren berufen, wovon Michael Stifel (um 1487–1567) genannt sei, dessen Namen wir mit der Einführung des Begriffs „Exponent“ und mit Vorlaufarbeiten zur Begründung des logarithmischen Rechnens verbinden [4, 2]. Auch Erhard Weigel (1625–1699) sei hervorgehoben, da es seit 2003 eine Erhard-Weigel-Gesellschaft e. V. in Jena gibt, die das vielschichtige Werk dieses Wissenschaftlers erforscht. Bei Weigel erwarb u. a. G. W. Leibniz (1646–1716) wichtige Grundkenntnisse.

In früheren Jahrhunderten war Mathematik nur ein Grundlagenfach für andere Berufsziele. Somit blieb die Zahl der mathematisch Tätigen lange Zeit überschaubar. Erst die im 19. Jahrhundert beginnende Lehramtsausbildung führte zu wachsenden Studierendenzahlen; in Jena bildete dafür die im Jahre 1874 gegründete wissenschaftliche Prüfungskommission für das Lehramt an höheren Schulen eine maßgebliche Basis. Zunächst wurden nur männliche Lehrkräfte für die Knabengymnasien herangebildet. Seit 1907 durften auch Frauen in Thüringen regulär studieren und ein Lehramtsstaatsexamen ablegen – dies war bemerkenswerterweise früher als im damals größten deutschen

Land mit den meisten Universitäten (Preußen). Wenn jemand damals Mathematik studierte, war es ein Lehramtsstudium – ein Diplom gab es noch nicht. Die bevorzugte Fächerkombination war Mathematik/Physik/Chemie, wobei die Mehrzahl der Abschließenden (ca. 15% Frauen) das Examen in drei Fächern ablegte. Bei der Fächerwahl und den Noten bestanden keine geschlechtsspezifischen Unterschiede [1].

2 Zur Zeit um 1900

Dass sich die Mathematik in Jena seit Ende des 19. Jahrhunderts vergleichsweise gut entfalten konnte, ist auch ein Verdienst von Ernst Abbe (1840–1905), der seit 1870 eine Professur für Mathematik und Physik an der Universität inne hatte und mit Mitteln der 1889 gegründeten Carl-Zeiss-Stiftung nicht nur Einrichtungen der Physik und angewandten Mathematik, sondern auch die Professur des Vertreters der Mathematischen Logik, Gottlob Frege (1848–1925), unterstützte [3]. Die im Verlaufe des 19. Jahrhunderts deutschlandweit z. T. vernachlässigten Anwendungen der Mathematik wurden durch eine Lehrbefähigung für angewandte Mathematik am Ausgang des Jahrhunderts wieder stärker gefördert. In Thüringen kam diese besondere Lehrbefähigung am 17. Januar 1900 in die Lehramtsprüfungsordnung. Jena orientierte sich dabei an Maßnahmen, die der Mathematiker und Unterrichtsreformer Felix Klein (1849–1925) in Göttingen (Preußen) durchgesetzt hatte. Kleins Doktorschüler Max Winkelmann (1879–1946) erhielt eine Professur in Jena (1910) und führte hier zahlreiche Personen zur Doktorwürde in angewandter Mathematik, darunter auch die erste Frau, Dorothea Starke (1902–1943), die ihre Dissertation mit der Bestnote summa cum laude 1927 verteidigte und als mathematische Assistentin (1928–1931) am Institut für angewandte Mathematik der Universität forschte und lehrte. Auch die Gebiete Funktionentheorie, Geometrie und Algebra waren in Jena gut vertreten.

3 Entwicklungen nach 1945

Als ein wesentliches Merkmal der Mathematik an der Universität Jena kann hervorgehoben werden, dass die politischen Umbrüche relativ gut verkraftet wurden, da herausragende Mathematiker/innen die Entwicklung bestimmten. Das betrifft sowohl die Zeit um 1945 als auch um 1989.

Obgleich das Mathematik-Gebäude (Abbeanum) im April 1945 durch einen anglo-amerikanischen Luftangriff teilweise zerstört worden war, begann der mathematische Lehrbetrieb bereits im Oktober 1945. Das war im deutschlandweiten Vergleich relativ früh. Die Jenaer Mathematik-Professoren hatten sich nicht mit dem NS-Regime eingelassen und konnten ihre Arbeit somit kontinuierlich fortsetzen: so z. B. der herausragende Algebraiker Friedrich Karl Schmidt (1901–1977), den (die jüdische Mathematikerin und Begründerin der modernen Algebra) Emmy Noether (1882–1935) stolz als ihren wissenschaftlichen Enkel bezeichnet hatte, oder der angewandte Mathematiker Ernst Weinel (1906–1979), der 1942 die Nachfolge von Winkelmann angetreten hatte – eine Aufforderung, in die NSDAP einzutreten, hatte Weinel ausdrücklich abgelehnt. Bis zu seiner Emeritierung 1966 übte Weinel eine fruchtbare Tätigkeit an der Universität Jena aus: Er erneuerte den Kontakt zur ortsansässigen Industrie (Zeiss, Schott), förderte moderne Numerische Mathematik in Verbindung mit dem in den 1950er Jahren entwickelten Zeiss-Rechenautomaten (ZRA 1) und etablierte auch Mathematische Statistik als Gebiet. Während der erwähnte F. K. Schmidt und weitere Mathematik-Professoren nur kurze Zeit in Jena blieben, wirkten hier – neben Weinel – vor allem zwei Professoren bis in die 1960er Jahre längerfristig: Wilhelm Maier (1896–1990), analytische Zahlentheorie, und Walter Brödel (1911–1997) mit Lehrtätigkeit in der Analysis. Beide brachten zahlreiche gute Mathematiker/innen hervor, die z. T. in Jena Professuren erhielten und heute noch am wissenschaftlichen Leben in Jena teilnehmen. Brödel wurde allerdings nach dem Mauerbau 1961 zur Aufgabe seiner Professur gezwungen, weil er nicht gewillt war, seinen Erstwohnsitz in Türk bei Bad Reichenhall aufzugeben [5].

Von 1945 bis 1951 existierte in Jena nur ein Diplom-Studiengang für Mathematik, der 1942 unter der NS-Diktatur erstmals eingerichtet worden war, um relativ schnell innerhalb von sechs Semestern praxisnahe Mathematiker heranzubilden. In ausgebauter Form gewann dieser Diplom-Studiengang nach 1945 zunächst gegenüber den Lehramtsstudiengängen an Gewicht, dies im Osten wie im Westen Deutschlands [1]. In den folgenden Jahren wurde das Studienprogramm für Diplom-Mathematik mehrfach umgestaltet. Heute basiert das Studium auf Bachelor- und Master-Studiengängen.[1]

4 Universität und Schule

In den 1960er Jahren war eine spezielle Abteilung Lehrerbildung eingerichtet worden, um die Lehramtsausbildung zu fördern. Dazu wurden kleinere Studiengruppen gebildet, um die Betreuung der Studierenden zu verbessern. Außerdem wurden spezifische Mathematik-Lehrveranstaltungen für Lehramtsstudierende eingeführt.

Um begabte Schüler/innen für ein Mathematik-Studium stärker zu interessieren und zu fördern, entstanden seit 1964 mathematische Schülerzirkel, die von wissenschaftlichen Assistenten der Universität bzw. Studierenden

[1] siehe http://www.fmi.uni-jena.de/Studierende.html

geleitet wurden. Diese Tätigkeit wurde seit 1967 durch die Herausgabe der Schülerzeitschrift $\sqrt[\text{Die}]{\text{WURZEL}}$ unterstützt. Zum Beispiel betrug im Jahre 1968 die Auflagenhöhe der $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 8 000 Exemplare. Wir erinnern an dieser Stelle daran, dass die Zeitschrift jüngst, im April 2012, mit dem Teubner-Förderpreis geehrt wurde, wobei der Jenaer Mathematik-Professor Hans Triebel (geb. 1936), herausragend im Gebiet der Analysis und mit mehreren Preisen und Ehrendoktorwürden ausgezeichnet, die Festrede hielt.

Das mit den Schülerzirkeln und der Schülerzeitschrift angestrebte Ziel, das Interesse an Mathematik sowie am Mathematikstudium zu heben, war bereits mit der 1963 gegründeten mathematisch-naturwissenschaftlichen Spezialschule Carl Zeiss verfolgt worden. Diese Schule existiert in neuer Form noch heute und wird von einem an der Universität Jena promovierten Mathematiker geleitet. Der bewusst gepflegte Kontakt zur Universität ist noch immer sehr eng, sodass auf diese Weise auch Schüler/innen gefördert werden, die regelmäßig Preise bei Mathematik-Olympiaden erzielen.

Seit den 1960er Jahren war die Zahl der ausgebildeten Absolventinnen und Absolventen in Mathematik stark gestiegen. Während im Zeitraum von 1946 bis 1966 in Jena etwa 200 Personen das Diplom in Mathematik absolviert hatten und ca. 270 das Lehramt in Mathematik/Physik, wurde diese Zahl im Zeitraum von 1967 bis 1985 erweitert auf ca. 700 Personen mit Diplom und 1140 mit Lehramt.

Die Studienpläne wurden in diesen Jahren wiederholt geändert. Zeitweise gab es ein verkürztes Studium mit vier Jahren, stärker auf Praxis und Mitarbeit in den Forschergruppen während der Diplomphase orientiert. Seit 1982 galt einer breiteren mathematischen Grundlagenausbildung wieder stärkere Aufmerksamkeit, ergänzt durch Entwicklungen auf dem Gebiet der Rechentechnik und Informatik. Die Forschungsrichtungen Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Mathematische Kybernetik und Rechentechnik (heute: Informatik) waren im Jahre 1983 für die seit 1966 bestehende sog. Sektion Mathematik als profilbestimmend bezeichnet worden. Diese Richtungen wurden ergänzt durch Geometrie und Zahlentheorie sowie durch Algebra und Geschichte der Mathematik.

5 Die Fakultät für Mathematik und Informatik nach 1989

Als die Universität Jena in den Jahren 1989 bis 1992 neu geordnet wurde, hatten einige Hochschullehrer in der Mathematik gerade das Rentenalter erreicht und schieden aus. Die weiterhin tätigen Mathematiker/innen erfreuten sich national und international eines hohen Ansehens – insbesondere in den Gebieten Analysis und Stochastik – wie Hans Triebel, erster Dekan der neu gegründeten Fakultät 1990, überlieferte. Neuberufungen erfolgten schließlich in den folgenden Jahren mit herausragenden Personen, auch aus dem Ausland, wenn neue Stellen aus Altersgründen besetzt werden mussten.

Das hohe Maß an Kontinuität in der Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität in Jena hatte gute Entwicklungsbedingungen gebracht. In Jena war kurz nach der Wende das im Osten Deutschlands erste durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderte Mathematik-Graduierten-Kolleg (zur Heranbildung in Mathematik promovierter Personen) gegründet worden. Auch die erste Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, die nach der Wende im Osten Deutschlands stattfand – wenn Berlin (mit Sonderstatus) unbeachtet bleibt – war im Jahre 1996 hier ausgerichtet worden.

Anstelle der Sektion Mathematik war im Jahre 1990 eine mathematische Fakultät entstanden, seit 1992 Fakultät für Mathematik und Informatik, mit Instituten für Mathematik, Angewandte Mathematik, Stochastik, Informatik, diese wiederum unterteilt in Abteilungen, einschließlich einer Abteilung für Didaktik der Mathematik und Informatik.[2]

Hier in Jena lehren zahlreiche international bedeutende Mathematiker und auch Mathematikerinnen. Während zum Beispiel an der Universität in Erlangen (gegr. 1742/43) erstmals im Jahre 2010 eine Frau als Mathematik-Professorin berufen wurde, besitzt Jena schon seit längerer Zeit weibliche Vorbilder, die international ebenfalls herausragend sind.[3]

Literatur

[1] Andrea Abele, Helmut Neunzert, Renate Tobies: *Traumjob Mathematik!* Birkhäuser, 2004.

[2] Michael Fothe, Bernd Zimmermann: *Zur Geschichte der Mathematik in Jena: Wurzeln strukturwissenschaftlichen Denkens.* Schriftenreihe des Frege Centre for Structural Sciences, Bd. 1, IKS Garamond, 2009.

[3] Karl-Heinz Schlote, Martina Schneider: *Mathematische Naturphilosophie, Optik und Begriffsschrift. Zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an der Universität Jena in der Zeit von 1816 bis 1900.* Harri Deutsch, 2011.

[4] Gert Schubring: *Die Mathematiker, Astronomen und Physiker an der Universität Jena (1558–1914).* Algorismus, Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, Heft 7, Dr. Erwin Rauner Verlag, 1992.

[5] Renate Tobies: *Mathematik an der Universität Jena – Trends zwischen 1945 und 1989.* Hochschule im Sozialismus. Studien zur Geschichte der Friedrich-Schiller-Universität Jena (1945–1990), Bd. 2, S. 1374–1399, Böhlau-Verlag, 2007.

[2] siehe http://www.fmi.uni-jena.de/Fakultät/Institute+und+Abteilungen.html

[3] siehe http://www.fmi.uni-jena.de/

Der √ABLEGER: Achilles und die Schildkröte – Kann man unendlich oft anhalten, wenn man jemanden überholen will?

von Matthias Müller, Jena

Der √ABLEGER ist eine Rubrik, die explizit für jüngere Schüler gedacht ist. In den Artikeln dieser Rubrik wird kaum mathematisches Vorwissen vorausgesetzt.

Der tapfere Achilles ist einer der größten Helden der griechischen Mythologie. Er ist ein wichtiger Hauptcharakter in Homers Ilias, die von der Belagerung der Stadt Troja durch die Griechen berichtet.

Der Film „Troja“ von Roland Emmerich hält sich nur in wenigen Teilen streng an die Vorlage von Homer, aber es gibt eine Szene, die im Film gut dargestellt wird. Achilles spricht in dieser Szene mit seiner Mutter und fragt sie, ob er nach Troja in den Krieg ziehen soll. Die Mutter antwortet ihm, dass, wenn Achilles in Griechenland bleibt, er eine Familie gründen und ein langes Leben führen, Kinder und Enkelkinder haben wird und diese sich seiner erinnern werden, wenn er tot ist. Aber wenn die letzten Enkel gestorben sind, wird niemand mehr seinen Namen kennen. Wenn Achilles nach Troja geht, sagt die Mutter, dann wird er ewigen Ruhm erlangen und noch in Tausenden von Jahren wird man seine Heldentaten besingen, aber er wird vor Troja fallen.

Achilles wird schließlich vom schlauen Odysseus überredet, in den Krieg zu ziehen, denn Odysseus weiß, was Achilles Schwäche ist, nämlich sein Stolz. Genau dieser Stolz hatte Achilles einst in eine vertrackte Situation gebracht.

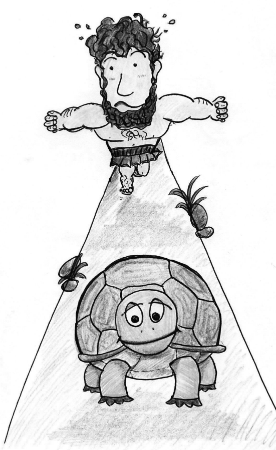


Bild: Lisa Danneleit

Diese Geschichte wird vom alten griechischen Philosophen Zenon von Elea erzählt: Achilles wurde einmal von einer Schildkröte zum Wettrennen herausgefordert und da Achilles die Herausforderung nicht ausschlagen konnte, aber die Schildkröte nicht ernst nahm, sagte er dem Wettkampf zu und gab der Schildkröte einen gewaltigen Vorsprung.

Nun berichtet Zenon von dem Rennen auf die folgende Art und Weise: Achilles und die Schildkröte laufen los. Achilles ist viel schneller als die Schildkröte und erreicht den Startpunkt der Schildkröte nach einer gewissen Zeit. Die Schildkröte hat aber in dieser Zeit auch eine gewisse Strecke zurückgelegt. Achilles hat die Schildkröte also noch nicht erreicht, deswegen läuft er weiter. Als er die Strecke überwunden hat, die die Schildkröte gerade zurückgelegt hatte, ist diese wieder ein Stück voran gekommen und er hat sie immer noch nicht erreicht.

A1	A2	A3	**A4**	
	S1	S2	S 3	**S4**

A . . . Standort des Achilles zu einem gewissen Zeitpunkt
S . . . Standort der Schildkröte zu einem gewissen Zeitpunkt

So geht das noch eine ganze Weile weiter und Achilles kommt der Schildkröte immer näher, aber erreicht sie nie.
Das ist eine paradoxe Situation: Wir wissen doch, dass Achilles die Schildkröte locker überholen müsste, doch wenn wir die obige Sichtweise verwenden, dürfte Achilles die Schildkröte nie erreichen. **Wo ist da der Fehler? Oder gibt es da überhaupt einen Fehler?**


Bild: Lisa Danneleit

Dieses Problem war für die alten Griechen eine knifflige Angelegenheit und deswegen wurde es auch als das Zenon-Paradoxon bezeichnet. Einige Mathematikhistoriker meinen, dass die Mathematik der Griechen an dieser Stelle an ihre Grenzen gestoßen ist. Erst die Mathematiker im 16. und 17. Jahrhundert konnten dieses Problem auflösen.
Allerdings hatte der große Archimedes von Syrakus von einer Summe berichtet, die er ausrechnen konnte. Die Summe, die er meinte, sieht wie folgt aus:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots$$

Dabei handelt es sich um eine Summe mit unendlich vielen Summanden, deren Ergebnis Archimedes trotzdem ermitteln konnte. Wie hat er das gemacht?
Er führt folgende Begründung an. Mehr als 2 kann die Summe nicht sein, denn wenn ich endlich viele Teile dieser Summe addiere, ist die Summe immer kleiner als 2. Auch wenn ich alle unendlich vielen Summanden aufaddiere, ist diese Summe nicht größer als 2, denn der nachfolgende Summand eines beliebigen Summanden ist immer nur halb so groß wie sein Vorgänger. Aber weniger als 2 kann diese Summe S auch nicht sein. Für jede natürliche Zahl n gilt nämlich

$$2 - S < 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\,,$$

also $2 - S < \frac{1}{2^n}$ bzw. $S > 2 - \frac{1}{2^n}$. Damit kann die Summe nicht mehr und nicht weniger als 2 sein. Das bedeutet:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots = 2$$

Siehst du die Verbindung zwischen dem Wettrennen des Achilles und der Summe des Archimedes? Überholt Achilles die Schildkröte und wenn ja, an welchem Punkt wird das sein?

Ob das die Grenze der griechischen Mathematik darstellt, bleibt offen. Allerdings haben die Griechen sich mit dieser Art von Problemen schwer getan, was daran liegen kann, dass sie stetig bemüht waren, den Begriff der Unendlichkeit in mathematischer Sicht zu vermeiden.

Auch die oben schon erwähnten Mathematiker des 16./17. Jahrhunderts haben sich mit dieser Summe beschäftigt. Dabei hat der deutsche Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz den folgenden Beweis vorgelegt:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots \\ 2S &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots \\ S = 2S - S &= 2 + 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \ldots = 2\,. \end{aligned}$$

Das scheint ein eleganter Beweis dafür zu sein, dass diese Summe gleich 2 ist. Doch Leibniz ist einfach von einer bestimmten Voraussetzung ausgegangen.

Findest du die Schwäche in der Argumentation von Leibniz?

Du kannst diesen Beweis ja einmal für die Summe der Potenzen der Zahl 2 (das sind die Reziproken der Summanden der oberen Summe) ausprobieren, dann bekommst du vielleicht eine Idee, wo das Problem liegen könnte.

Für diese eben angestellten Überlegungen und Probleme wie das Zenon-Paradoxon muss man sich genauer mit dem Begriff der Unendlichkeit im mathematischen Sinne auseinandersetzen. Wer davon mehr erfahren will, sollte in das Buch [1] hineinschauen.

Literatur

[1] Rudolf Taschner: *Das Unendliche – Mathematiker ringen um einen Begriff*. Springer, 2005.

Knobelei: Stelle dir vor, du bist Portier in einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern. Leider ist das Hotel total ausgebucht und dennoch kommt ein weiterer Tourist zu dir und bittet um ein Zimmer. Da das Wetter schrecklich und das nächste Hotel weit weg ist, willst du ihn nicht wegschicken. **Wie kannst du ihm ein Zimmer anbieten, ohne einen anderen Gast zu entlassen?**

$\sqrt{\text{WURZEL}}$-Aufgaben und Lösungen

Normalerweise beendet die Seite mit den $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Aufgaben eine Ausgabe. Die Aufgaben werden dann in einer späteren Ausgabe aufgelöst. Für dieses Sonderheft haben wir uns entschieden, einige unserer Meinung nach besonders schöne bereits veröffentlichte Aufgaben mit den zugehörigen Lösungen abzudrucken. Trotzdem ist natürlich jeder dazu eingeladen, sich vor dem Blick auf die Lösungen zuerst selbst an den Aufgaben zu versuchen.

1 Ralph Tandetzky, Jena

Man beweise, dass $(n!)^{n+1}$ Teiler von $(n^2)!$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung nach Benjamin Scharf, Jena

Wir betrachten ein Turnier mit n^2 Teilnehmern. In diesem Turnier werden immer gleichzeitig n Spiele mit je n Teilnehmern gespielt. Wir wollen nun ermitteln, wie viele verschiedene Aufteilungen der n^2 Spieler möglich sind.

Dazu schreibe man die n^2 Teilnehmer in einer gewissen Reihenfolge auf. Die ersten n gehören zu Spiel 1, die zweiten n zu Spiel 2 usw. Die Anzahl möglicher Anordnungen der Teilnehmer ist $\left(n^2\right)!$. Nun ist es allerdings egal, in welcher Reihenfolge wir die ersten n Teilnehmer aufschreiben – es ist nur wichtig, dass sie in der Gruppe der ersten n Teilnehmer sind. Somit müssen wir die Gesamtzahl durch $n!$ – die Anzahl der möglichen Anordnungen der ersten n Teilnehmer – teilen. Das Gleiche gilt für die zweiten n Teilnehmer usw. Insgesamt müssen wir die Gesamtzahl der Anordnungen $\left(n^2\right)!$ durch $\left(n!\right)^n$ teilen. Wir haben aber noch nicht beachtet, dass es egal ist, ob wir nun Spiel 1 oder Spiel 2 oder ein anderes Spiel zu Beginn aufschreiben. Ob das Spiel, das die ersten n Teilnehmer spielen, nun Spiel 1 oder 2 oder anders heißt, ist ja völlig egal. Deshalb müssen wir die Gesamtzahl noch einmal durch $n!$ teilen.

Insgesamt erhalten wir, dass

$$\frac{\frac{\left(n^2\right)!}{\left(n!\right)^n}}{n!} = \frac{\left(n^2\right)!}{\left(n!\right)^{n+1}}$$

als Anzahl der möglichen Aufteilungen eine ganze Zahl, der Nenner also ein Teiler des Zählers ist.

2 Peter Harus, Berlin

Man ordne die Ziffern von 1 bis 9 so als 9-stellige Zahl an, dass je zwei aufeinanderfolgende Ziffern eine Zahl des (kleinen) Einmaleins bilden, d. h., dass diese Zahl gleich einem Produkt von k und l mit $k, l \in \{1, \ldots, 9\}$ ist.

Lösung von Heinz Klement, Asperg:

Es sei $x, y \in \{1, \ldots, 9\}$ und $x \neq y$. Dann soll das Paar xy zulässig heißen, wenn es Zahlen $k, l \in \{2, \ldots, 9\}$ mit $10x+y = k \cdot l$ gibt. Das einzige zulässige Paar mit der Ziffer 9 ist 49, muss also am Ende der neunstelligen Zahl stehen. 72 und 27 sind die einzigen zulässigen Paare mit der Ziffer 7. Es kann nur eines dieser Paare auftreten und zwar entweder am Anfang oder am Ende, weil sonst eine Ziffer doppelt vorkäme. Da das Ende der neunstelligen Zahl schon besetzt ist, muss 72 am Anfang stehen. Zulässige Paare mit der Ziffer 8 sind 18, 28, 48 und 81. Da 49 am Ende der Zahl steht, ist nur 7281___49 möglich. Nicht zulässig sind 13 und 34. Daher muss die Zahl 7281_3_49 heißen. Das einzige zulässige Paar mit $x \in \{5, 6\}$ und $y = 3$ ist 63. Also ist höchstens 728163549 die gesuchte Zahl. Dass sie wirklich die Aufgabe löst, ist sofort zu verifizieren.

3 Šefket Arslanagić, Sarajevo/Bosnien und Herzegowina

Seien alle Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^3 + px + q$ ($p, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$) reell. Man zeige, dass p negativ ist.

Lösung von Uwe Rilling, Staig:

Das Polynom f zerfällt in Linearfaktoren mit Nullstellen x_1, x_2 und x_3:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3 \,. \end{aligned}$$

Damit sind nach Koeffizientenvergleich

$$p = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \qquad q = -x_1x_2x_3 \,.$$

Wegen $x_3 = -(x_1 + x_2)$ folgt

$$p = -x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2, \qquad q = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \,.$$

Also ist p für $x_1, x_2 < 0$ und $x_1, x_2 > 0$ negativ. Wegen $q \neq 0$ gilt auch $x_1, x_2 \neq 0$. Es bleibt der Fall, dass eine Nullstelle größer und die andere kleiner Null ist. Man erkennt in der Darstellung

$$p = -x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 = -(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 \,,$$

dass p wieder negativ sein muss.

Anmerkung der Redaktion: Die Behauptung der Aufgabe folgt sofort, wenn man die Vorzeichenregel von Descartes benutzt. Diese besagt u. a., dass die Anzahl der positiven reellen Nullstellen eines Polynoms höchstens so groß ist wie die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten im Polynom. Für $p \geq 0$ und $q > 0$ hat $f(x)$ keinen Vorzeichenwechsel und $f(-x)$ genau einen. Somit gibt es genau eine negative reelle Nullstelle und keine positive reelle Nullstelle. Ist $p \geq 0$ und $q < 0$, so hat $f(x)$ einen Vorzeichenwechsel, aber $f(-x)$ keinen. Also gibt es genau eine reelle Nullstelle, die zudem positiv ist. In beiden Fällen gibt es also nur eine reelle Nullstelle. Also muss $p < 0$ sein, falls das Polynom drei reelle Nullstellen hat.

4 Henning Thielemann, Halle/Saale

„Die meisten Frauen möchten doch, dass jeder ihr Alter kennt, aber niemand ihren Geburtstag." – Oder war's genau umgekehrt?

Stellen Sie sich vor, sie wollen den Geburtstag einer Dame herausfinden, indem Sie sie hin und wieder nach ihrem aktuellen Alter fragen. Natürlich wollen Sie so wenig wie möglich Fragen stellen. Wie oft müssen Sie mindestens fragen, um sicher den Geburtstag herauszubekommen? Nach wie vielen Tagen haben Sie dabei in jedem Fall Gewissheit?

Lösung von Reiner Möwald, Germersheim (redaktionell bearbeitet):

1. Bestimmung des Geburtstages mit möglichst wenig Fragen nach dem Alter

Die 1. Frage dient der Ermittlung des Alters der Person. Danach lässt sich das Problem auf die Betrachtung eines Binärbaumes wie folgt zurückführen: Nach einer erneuten Frage nach dem Alter hat sich das Alter geändert oder nicht. Man beschriftet die Knoten des Binärbaumes mit den Zahlen von 1 bis 365 so im Inorder-Durchlauf (linker Teilbaum, Wurzel, rechter Teilbaum), dass o. B. d. A. der Tag, an dem die 1. Frage gestellt wurde, die Nummer 365 erhält und der darauffolgende Tag die 1.

Die Knoten beinhalten die Fragen nach dem Alter an diesem Tage. Die Kanten stellen die Antwort dar: Linke Kante … Geburtstag liegt im Intervall, also hat sich das Alter in Bezug auf die letzte Frage erhöht, und rechte Kante … Geburtstag liegt nicht im Intervall.

Ein Binärbaum der Höhe n hat 2^n-1 Blätter und es gilt $2^8-1 < 365 < 2^9-1$. Damit benötigt man mit der Anfangsfrage 10 Fragen.

2. Berechnung der Anzahl der Tage, die dafür nötig sind

Legen wir den Binärbaum der Höhe 9 zugrunde, sind jeweils 9 Fragen zu stellen. Da man nach der letzten Frage nicht mehr warten muss, gibt es den schlechtesten Fall, in dem man 8 mal nach links im Binärbaum wandern muss. Dann kommt man beim Tag 2 bzw. Tag 3 an. Da die 1. Frage am Tag 1 gestellt wurde, braucht man also maximal 8 Jahre und 2 Tage.

Diese Möglichkeit ist allerdings bei Weitem nicht die beste, es gilt nämlich

$$\sum_{i=0}^{4} \binom{9}{i} < 365 < \sum_{i=0}^{5} \binom{9}{i}.$$

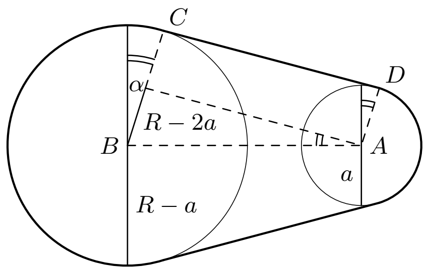
Somit gibt es also Binärbäume, deren Wege zu den Blättern höchstens 5 linke Kanten enthalten und die mehr als 365 Blätter besitzen. Um das Alter der Person zu ermitteln, muss man also maximal 5 mal im Binärbaum nach links gehen, sprich knapp ein Jahr warten. Damit ergibt sich als obere Schranke ein Wartezeitraum von $5,5$ Jahren (wegen der Anfangsfrage).

Mithilfe genauerer Betrachtungen lässt sich feststellen, dass die Fragezeit auf 4 Jahre und 267 Tage minimiert werden kann, wobei sich die maximale Anzahl der Fragen nicht erhöht.

5 Wolfgang Moldenhauer, Bad Berka

Auf dem Fußboden seien zwei identische Kegel befestigt, einer mit der Grundfläche auf dem Boden, der andere genau umgedreht mit der Spitze unten. Am Boden wird nun ein Seil der Länge l straff um die Grundfläche des einen Kegels und die Spitze des anderen Kegels gelegt. Nun soll dieses Seil parallel zum Boden hochgezogen werden. Muss dabei das Seil verlängert werden?

Lösung von Xaver Fichtl, Lindau und Heinz Klement, Asperg:



Der Radius des Grundkreises der Kegel sei R. Das Seil liegt in einer zur Grundfläche parallelen Ebene, die den einen Kegel in einem Kreis K_1 mit Mittelpunkt A und Radius a und den anderen Kegel in einem Kreis K_2 mit Mittelpunkt B und Radius $R-a$ schneidet. Die Länge eines in dieser Ebene um die Kegel gespannten Seiles besteht aus den außen liegenden Kreisbogenlängen der Kreisbögen b_A um A mit Radius a und Winkel $\pi-2\alpha$ und b_B um B mit Radius $R-a$ und Winkel $\pi+2\alpha$ sowie aus den beiden Tangentenlängen der Größe $T = |CD|$.

Für die Kreisbögen gilt

$$b_A + b_B = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi} \cdot 2a\pi + \frac{\pi + 2\alpha}{2\pi} \cdot 2(R-a)\pi = R\pi + 2\alpha(R-2a).$$

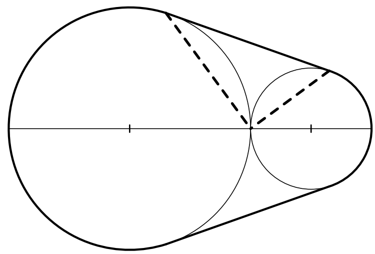
Sie haben zusammen die Länge des halben Umfangs des Grundflächenkreises mit Radius R plus zweimal die Länge K des Kreisbogens mit Radius $R-2a$ und Winkel α. Somit gilt für die Länge s des gespannten Seils

$$s = b_A + b_B + 2T = R\pi + 2(T + K).$$

Ist $a = \frac{R}{2}$, so sind beide Kreise gleich groß und die Seillänge s ist $R\pi+2|AB|$. Wird a kleiner, so vergrößern sich der Winkel α und der Radius $R - 2a$, während T kleiner wird. Es gilt

$$T + K = |AB|\cos\alpha + \alpha\cdot|AB|\sin\alpha = |AB|\,(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha) =: |AB|f(\alpha).$$

Die Funktion f ist wegen $f'(\alpha) = \alpha\cos\alpha$ monoton wachsend in α für $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Somit wird das Seil am längsten, wenn $a = 0$ bzw. aus Symmetriegründen $a = R$ ist.



Setzt man zusätzlich voraus, dass die Kreiskegel an einer Mantellinie aneinander liegen, so findet man eine geometrisch kurze Lösung: Man erhält in jeder Höhe zwei einander berührende Kreise mit den Durchmessern x und $d-x$. Ihre Umfangssumme ist also $\pi x+\pi(d-x) = \pi d$, die wegen Kreisbogenlänge > Sehnenlänge und der Dreiecksungleichung größer ist als die Länge eines die Kreise straff umgebenden Seils (siehe Skizze).

Da am Boden der eine Kreis zu einem Punkt geschrumpft ist, ist dort das Seil so lang wie der Umfang πd des anderen Kreises und somit länger als die nötige Seillänge in einer beliebigen Höhe. Man braucht es also nicht zu verlängern.

6 Oleg Faynshteyn, Leipzig

Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 1, in dem sich 151 Punkte befinden. Man beweise, dass es unter diesen stets 7 Punkte gibt, die man mit einem Kreis vom Durchmesser $\frac{\sqrt{2}}{5}$ *abdecken kann.*

Lösung von Peter Kosater, Osnabrück

Man unterteile das gegebene Quadrat in 25 Teilquadrate mit Seitenlänge $\frac{1}{5}$. Wegen $151 = 25\cdot 6 + 1$ müssen nach dem Schubfachprinzip mindestens in einem dieser Teilquadrate mehr als sechs Punkte liegen. Da der Umkreisdurchmesser dieses Quadrats $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ist, folgt die Behauptung.

In dieser Ausgabe lesen Sie:

Impressum

Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$ ist eine Zeitschrift für Mathematik und erscheint monatlich.

Herausgeber: **Wurzel – Verein zur Förderung der Mathematik an Schulen und Universitäten e. V.**

Redaktion: Jörg Bader, Eduard Biche, Erich Eckner, Thomas Fischer, Tim Fritzsche (v. i. S. d. P.), Daniel Kilian, Elke Mäurer, Lucas Geitel, Benjamin Scharf

Anschrift: Wurzel, FSU Jena, Fakultät für Mathematik und Informatik, 07737 Jena
Telefon: (03641) 9 46006
E-Mail: redaktion@wurzel.org
Internet: www.wurzel.org

Bankverbindung: HypoVereinsbank Jena
BLZ: 830 200 87 Konto: 413 06 18
IBAN: DE21 8302 0087 0004 1306 18
SWIFT/BIC: HYVEDEMM463

Titelbild: Apfelmännchentropfen

Preis: Jahresabonnement mit Versand im Inland 24 €. Bestellungen und weitere Informationen direkt bei der Redaktion oder im Internet.
ISSN: 0232–4539
Vertriebskennzeichen: F 6381
Artikel-Nummer: 10932
Druck: Saxoprint GmbH, Dresden

Redaktionsschluss: 31. 8. 2012